5 Kalküle des Natürlichen Schliessens

5.1 Klassische Aussagenlogik

5.1.1 Einleitung

Bei den beiden bisher betrachteten Kalkülarten der Hilbert-Frege-Kalküle und der Sequenzenkalküle können Herleitungen (auch) in Baumform angegeben werden (wobei allerdings im Fall von Hilbert-Frege-Kalkülen die Angabe einer Herleitung in linearisierter Form als Formelfolge üblicher ist).
Dabei bestehen die Knoten eines Beweisbaumes aus Formeln (Hilbert-Frege-Kalküle) oder aus Sequenzen (Sequenzenkalkülen). Die Endknoten des Beweisbaumes bilden dabei jeweils Axiome und der Übergang von Knoten zu anderen Knoten geschieht mithilfe von Regeln. Die Wurzel des Beweisbaumes bildet die zu beweisende Formel bzw. Sequenz.

BEMERKUNG:
Den folgenden Teil eines Beweisbaumes:

```
...            ...
A              B
   \        /
      C
      |
      D
      ...
```

schreiben wir kompakter als:

```
...    ...
```
$$\cfrac{\cfrac{A \qquad B}{C}}{D}$$
```
   ...
```

Im Falle von Hilbert-Frege-Kalkülen und Sequenzenkalkülen besteht jeder Knoten aus einer herleitbaren (und damit allgemeingültigen) Formel bzw. Sequenz.
Erst beim Übergang zu Konsequenzrelationen $X \vdash A$ bei Hilbert-Frege-Kalkülen können in X auch Formeln auftreten, die selbst nicht allgemeingültig (etwa kontingent) sind.
Dies versucht das Natürliche Schliessen zu modellieren; man denke etwa an indirekte Beweise oder Beweise durch Fallunterscheidungen, wo nicht allgemeingültige Formeln als Annahmen auftreten können.

Allgemeine Charakteristika von Kalkülen des Natürlichen Schliessens sind:
(i) sie bestehen aus expliziten Regeln zur Konstruktion von Beweisbäumen, wobei die einzelnen Knoten dieser Beweisbäume aus Formeln (und nicht aus Sequenzen) bestehen; in diesem Sinne modellieren sie das Schliessen von Formeln auf andere Formeln.
(ii) sie verwenden Annahmen, die später im Verlauf einer Herleitung geschlossen werden; genauer formuliert modellieren sie also das Schliessen von Formeln unter bestimmten Annahmen auf andere Formeln (unter bestimmten anderen Annahmen).

(iii) indem man bei jedem Schritt die Annahmen X, von denen eine Formel A abhängt, explizit macht, erhält man die Regeln eines Metakalküls in Sequenzenform, der die Herleitung von Sequenzen der Gestalt X $\vdash$ A gestattet, und der in ‚natürlicher' Weise die Konsequenzrelation X $\vdash_{HF}$ A modelliert.
(iv) Kalküle des Natürlichen Schliessens sind daher (genauso wie Sequenzenkalküle und im Gegensatz zu Hilbert-Frege-Kalkülen) Regel-Kalküle (und keine Axiom-Regel-Kalküle).

BEMERKUNG:
Es gibt im Falle des Natürlichen Schliessens nicht nur viele Varianten, sondern darüber hinaus viele verschiedene Versionen der Präsentation. Wie bei der Version ‚Regeln zur Konstruktion von Beweisbäumen' werden wir bei allen anderen betrachteten Versionen V die Version ‚Regeln zur Herleitung von Sequenzen der Gestalt X $\vdash$ A' als Metakalkül für V auffassen; vgl. auch Abschnitt 5.1.15

In diesem Abschnitt wollen wir zuerst einen kurzen Blick auf die Version N0 der ‚Regeln zur Konstruktion von Beweisbäumen' werfen.

DEFINITION (Annahmen):
Annahmen sind Formelvorkommen, die an den Endknoten eines Beweisbaumes auftreten; sie können offen sein oder geschlossen werden.
Annahmen werden durch (Annahmen-)Markierungen gekennzeichnet; dies können natürliche Zahlen oder Variablensymbole sein; wir verwenden u, v, w, x, y, z für diese Markierungen.
Zwei Vorkommnisse α, β derselben Formel A gehören zur selben Annahmenklasse, wenn sie eine gemeinsame Markierung haben und entweder beide offen sind oder beide beim gleichen Schluss geschlossen werden (verschiedene Formeln sollen verschiedene Markierungen haben und die Markierungen von korrespondierenden offenen Annahmen sollen identisch sein).
Annahmenklassen werden immer als ganzes geschlossen, d.h. bei jedem Schluss sind entweder alle Annahmen in einer Klasse geschlossen, oder alle offen; das Schliessen einer Annahmenklasse wird durch das Wiederholen der Markierung(en) der Klasse(n) beim Schluss angezeigt.

Die Notationen

(i)	(ii)
D	$[A]^u$
A	D
	B

haben folgende Bedeutung:
(i) eine Herleitung D mit Konklusion A
(ii) eine Herleitung D mit Konklusion B und einer Menge [A] von offenen Annahmen, die aus allen denjenigen Vorkommnissen der Formel A an den Endknoten des Beweisbaumes D besteht, die die Markierung u haben (auch B und [A] sind Bestandteil von D).

Herleitungen in N0 werden induktiv anhand folgender Regeln konstruiert:
Induktionsanfang:
ein einzelnes Vorkommnis einer Formel A (mit einer Markierung) ist ein einknotiger Beweisbaum, der eine Herleitung von A aus der offenen Annahme A repräsentiert; hier gibt es keine geschlossenen Annahmen.

Induktionsschritt:
Seien D_1, D_2, D_3 Herleitungen; eine Herleitung D wird nach einer der folgenden Regeln konstruiert; dabei enthalten die Annahmenklassen $[A]^u$, $[B]^v$, $[\neg A]^u$ offene Annahmen der Herleitung der Prämisse(n) des letzten Schlusses, die bei der ganzen Herleitung geschlossen werden:

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ A & B \end{array}}{A \wedge B} \quad (\wedge\ E)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ A \wedge B \end{array}}{A} \quad (\wedge\ B1)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ A \wedge B \end{array}}{B} \quad (\wedge\ B2)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ A \end{array}}{A \vee B} \quad (\vee\ E1)$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} D_1 \\ B \end{array}}{A \vee B} \quad (\vee\ E2)$$

$$\dfrac{\begin{array}{ccc} & [A]^u & [B]^v \\ D_1 & D_2 & D_3 \\ A \vee B & C & C \end{array}}{C} \quad (\vee\ B)^{u,\, v}$$

$$\dfrac{\begin{array}{c} [A]^u \\ D_1 \\ B \end{array}}{A \rightarrow B} \quad (\rightarrow E)^u$$

$$\dfrac{\begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ A & A \rightarrow B \end{array}}{B} \quad (\rightarrow B)$$

$$\begin{array}{ll} [A]^u & \\ D_1 & \\ \underline{\bot} & \\ \neg A & (\neg\, E)^u \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \begin{array}{cc} D_1 & D_2 \\ \underline{A \qquad} & \underline{\neg A} \\ \multicolumn{2}{c}{\bot} \end{array} & (\neg\, B) \end{array}$$

Diese Regeln sind die Regeln für die Minimallogik; um die intuitionistische Logik zu erhalten, kommt noch (⊥ i) dazu; um die klassische Logik zu erhalten, kommt (⊥ c) dazu:

$$\begin{array}{ll} D & \\ \underline{\bot} & \\ A & (\bot\, i) \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} [\neg A]^u & \\ D & \\ \underline{\bot} & \\ A & (\bot\, c)^u \end{array}$$

Bei Anwendung der Regel $(\vee\ B)^{u,\,v}$ wird die Menge $[A]^u$ der offenen Annahmen der Form A in D_2, und die Menge $[B]^v$ der offenen Annahmen der Form B in D_3 geschlossen;
bei Anwendung der Regel $(\rightarrow E)^u$ wird die Menge $[A]^u$ der offenen Annahmen der Form A in D geschlossen;
bei Anwendung der Regel $(\bot\ c)^u$ wird die Menge $[\neg A]^u$ der offenen Annahmen der Form ¬A in D geschlossen;
alle anderen Annahmen bleiben offen.

In den oben erwähnten drei Regeln ist es erlaubt, daß $[A]^u$, $[B]^v$ bzw. $[\neg A]^u$ leer ist.

BEISPIEL:

$$\begin{array}{ll} \underline{A^u} & \\ \underline{B\rightarrow A} & (\rightarrow E)^v \\ A\rightarrow(B\rightarrow A) & (\rightarrow E)^u \end{array}$$

Weiters wird nicht angenommen, daß $[A]^u$, $[B]^v$ bzw. $[\neg A]^u$ aus allen offenen Annahmen der Form A, B bzw. ¬A besteht, die oberhalb des entsprechenden Schlusses vorkommen.
Werden hingegen in einer Herleitung *alle* Annahmen einer bestimmten Form, die vor Anwendung einer der drei Regeln offen sind, simultan geschlossen, erfüllt die Herleitung die sog. Complete Discharge Convention, CDC (das Schliessen von Annahmen wird im Englischen als to close, eliminate, cancel oder discharge bezeichnet).
Jede Herleitung bleibt korrekt, wenn das Schliessen von Annahmen gemäß der CDC geregelt wird; das Verwenden von Markierungen und das Wiederholen von Markierungen bei Schlüssen, wo Annahmenklassen geschlossen werden, wird dadurch überflüssig (bleibt aber als Gedächtnishilfe praktisch).

Obwohl also in Bezug auf die Herleitbarkeit nichts verloren geht, wenn man die CDC voraussetzt, ist die Version ohne CDC in bestimmten Punkten allgemeiner: so etwa im Hinblick auf Beziehungen von N0 zu Termkalkülen und im Hinblick auf starke Normalisierung der klassischen Logik; vgl. etwa Troelstra /Schwichtenberg (1996, 36f) bzw. Stålmarck (1991).
Da diese sehr speziellen Themen jedoch nicht Gegenstand dieser Vorlesung sind, beschränken wir uns aus Gründen der Einfachheit auf Varianten, die die CDC erfüllen.

BEMERKUNG:
Obige Version N0 wurde in der Signatur $\{\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ formuliert; verwendet von Bibel / Eder (1993) (mit ($\bot$ i) und $\vdash A\vee\neg A$, siehe Lemma 1); dies entspricht Gentzens (1934/35) originalem Kalkül NK; verwendet auch von Ungar (1998);
man erhält eine Variante N0‘ in der Signatur $\{\bot, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, indem man die Regeln $(\neg\ E)^u$ und ($\neg$ B) streicht; definiert man $\neg A := A\rightarrow\bot$, sind dann $(\neg\ E)^u$ und ($\neg$ B) Spezialfälle von $(\rightarrow E)^u$ und ($\rightarrow$ B); verwendet von Prawitz (1965), Troelstra /Schwichtenberg (1996).

Der Übergang der Version ‚Regeln zur Konstruktion von Beweisbäumen‘ unter der CDC zur Version ‚Regeln zur Herleitung von Sequenzen der Gestalt $X \vdash A$‘ geschieht nun dadurch, daß man ‚A ist herleitbar aus Annahmen X‘ interpretiert als die Herleitbarkeit einer Sequenz der Form $X \vdash A$; vgl. Troelstra /Schwichtenberg (1996, 34f); in den Herleitungen für N2 in Abschnitt 5.1.6 sind auch jeweils die entsprechenden Beweisbäume angegeben.

Viele Begriffe aus Abschnitt 4.1.1 können in diesem Kapitel (mit leichten Modifikationen) übernommen werden; insb. hat man hier wieder die Möglichkeit, den Begriff der Sequenz mithilfe von endlichen Folgen, Multimengen oder Mengen von Formeln zu definieren.

Jede der betrachteten Varianten von Kalkülen des Natürlichen Schliessens besteht wiederum aus Axiomen(schemata), logischen Schlussregeln und Strukturschlussregeln.

ÜBERSICHT Nr. 1 (über verwendete Axiome und Regeln):

Axiome(nschemata):
$A \vdash A$ (Ax*)

(Grund-)Schlussregeln:
Logische Regeln:
Logische Einführungsregeln:

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash B}{X, Y \vdash A\wedge B} \qquad (\wedge\ E)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash B}{X \vdash A\wedge B} \qquad (\wedge\ Ea)$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A\vee B} \qquad (\vee\ E1)$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A\lor B} \qquad (\lor\ E2)$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A\to B} \qquad (\to\ E)$$

$$\frac{X, A \vdash \bot}{X \vdash \neg A} \qquad (\neg\ E)$$

Logische Beseitigungsregeln:

$$\frac{X \vdash A\land B}{X \vdash A} \qquad (\land\ B1)$$

$$\frac{X \vdash A\land B}{X \vdash B} \qquad (\land\ B2)$$

$$\frac{X \vdash A\lor B \qquad Y, A \vdash C \qquad Z, B \vdash C}{X, Y, Z, \vdash C} \qquad (\lor\ B)$$

$$\frac{X \vdash A\lor B \qquad X, A \vdash C \qquad X, B \vdash C}{X \vdash C} \qquad (\lor\ Ba)$$

$$\frac{X \vdash A\to B \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \qquad (\to\ B)$$

$$\frac{X \vdash A\to B \qquad X \vdash A}{X \vdash B} \qquad (\to\ Ba)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash \neg A}{X, Y \vdash \bot} \qquad (\neg\ B)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash \neg A}{X \vdash \bot} \qquad (\neg\ Ba)$$

Widerspruchsregeln:

$$\frac{X \vdash \bot}{X \vdash A} \qquad (\bot\ i)$$

$$\frac{X, \neg A \vdash \bot}{X \vdash A} \qquad (\bot\ c)$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash B}{X, A \vdash B} \qquad (AB)$$

$$\frac{X, A, A \vdash B}{X, A \vdash B} \qquad \text{(KÜ)}$$

$$\frac{X, A, B, Z \vdash Y}{X, B, A, Z \vdash Y} \qquad \text{(VE)}$$

5.1.2 Die Variante N2 und die Adäquatheit von N2

Wir betrachten zuerst einen Kalkül des Natürlichen Schliessens in der Formulierung von Multimengen, u.z. die Variante N2:

DEFINITION (N2):
Ist X eine endliche Multimenge von Formeln und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz
N2 enthalte folgende Axiome und Grundschlussregeln:
Axiome: (Ax*)
Logische Einführungsregeln: ($\wedge$ E), ($\vee$ E1), ($\vee$ E2), ($\rightarrow$ E), ($\neg$ E)
Logische Beseitigungsregeln: ($\wedge$ B1), ($\wedge$ B2), ($\vee$ B), ($\rightarrow$ B), ($\neg$ B)
Widerspruchsregel: ($\bot$ c)
Strukturschlussregeln: (AB), (KÜ)

BEMERKUNG:
Als Axiome werden alle Sequenzen der Gestalt $A \vdash A$ (für alle Formeln A) angenommen, also auch $\bot \vdash \bot$; nur mit Axiomen der Gestalt $p \vdash p$ (und $\bot \vdash \bot$) kommt man hier nicht aus, da man in Herleitungen die Formeln zuerst zerlegen und dann wieder aufbauen muß.

BEMERKUNG:
Dieser Kalkül ist nicht mehr symmetrisch (wie etwa der Sequenzenkalkül S2); statt dessen gibt es zu jedem Junktor eine (oder zwei) Einführungsregel(n) und eine (oder zwei) Beseitigungsregel(n); im Deutschen E- und B-Regeln, im Englischen I-(introduction) und E-(elimination)Regeln.

BEMERKUNG (zur verwendeten Signatur):
N2 ist in der Signatur $\{\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ formuliert;
man erhält eine Variante N2‘ in der Signatur $\{\bot, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, indem man ($\neg$ E) und ($\neg$ B) streicht; definiert man $\neg A := A\rightarrow\bot$, kann man leicht zeigen, daß ($\neg$ E) und ($\neg$ B) Spezialfälle von ($\rightarrow$ E) und ($\rightarrow$ B) sind:

$$\frac{X, A \vdash \bot}{X \vdash A\rightarrow\bot}\ (\rightarrow \mathrm{E}) \qquad\qquad \frac{X \vdash A \qquad Y \vdash A\rightarrow\bot}{X, Y \vdash \bot}\ (\rightarrow \mathrm{B})$$

man erhält eine Variante N2‘‘ in der Signatur $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, indem man anstelle von $\bot$ die leere Menge $\varnothing$ schreibt; dann muss man allerdings auch Sequenzen der Form $X \vdash \varnothing$ zulassen, was jedoch der Idee zuwiderläuft, daß die Knoten eines Beweisbaumes aus Formeln bestehen; man könnte anstelle von $\bot$ auch $B\wedge\neg B$ schreiben, nur wäre dann ($\neg$ B) keine echte Negationsbeseitigungsregel mehr; mehr zu Kalkülen in der Signatur $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ in den Abschnitten 5.1.12ff.

BEMERKUNG:
($\rightarrow$ E) heißt auch konditionaler Beweis; ($\bot$ c) heißt auch indirekter Beweis.

BEMERKUNG:
($\perp$ i) ist ein Spezialfall von ($\perp$ c):

$$\dfrac{\dfrac{X \vdash \perp}{X, \neg A \vdash \perp}\ \text{(AB)}}{X \vdash A}\ (\perp \text{c})$$

Im folgenden verwenden wir bei Herleitungen in N2 auch explizit ($\perp$ i).

BEMERKUNG:
Folgende Regeln sind wegen (AB) und (KÜ) zulässig in N2, wobei X \ {A} bedeutet, daß A nicht mehr in der Multimenge X vorkommt:

$$\dfrac{X \vdash A \vee B \qquad Y \vdash C \qquad Z \vdash C}{X, Y, Z \vdash C}\ (\vee \text{B*})$$

$$\dfrac{X \vdash B}{X \vdash A \to B}\ (\to \text{E*})$$

$$\dfrac{X \vdash A \vee B \qquad Y, A \vdash C \qquad Z, B \vdash C}{X, Y \setminus\{A\}, Z \setminus\{B\} \vdash C}\ (\vee \text{B**})$$

$$\dfrac{X, A \vdash B}{X \setminus\{A\} \vdash A \to B}\ (\to \text{E**})$$

$$\dfrac{X, \neg A \vdash \perp}{X \setminus\{\neg A\} \vdash A}\ (\perp \text{c**})$$

BEMERKUNG (zur minimalen Logik):
Die minimale Variante N2m entsteht aus N2 durch Weglassen von ($\perp$ c), der sog. klassischen Widerspruchsregel.

BEMERKUNG (zur intuitionistischen Logik):
Der intuitionistische Variante N2i entsteht aus N2m durch Hinzufügen der intuitionistischen Widerspruchsregel ($\perp$ i).

LEMMA 1 (4 äquivalente Charakterisierungen von N2):
(i) N2 = N2m + ($\perp$ c)
(ii) N2 = N2i + $\vdash A \vee \neg A$ = N2m + ($\perp$ i) + $\vdash A \vee \neg A$
(iii) N2 = N2m + $\vdash \neg\neg A \to A$
(iv) N2 = N2m + folgender Regel: $\dfrac{X \vdash \neg\neg A}{X \vdash A}\ (\neg\neg \text{B})$

BEWEIS:
(i) ⇒ (ii): siehe Beispiel 3 weiter unten;
(ii) ⇒ (iii):

$$\dfrac{\dfrac{\vdash A\lor\neg A \qquad A\vdash A \qquad \dfrac{\dfrac{\neg A\vdash\neg A \qquad \neg\neg A\vdash\neg\neg A}{\neg\neg A,\neg A\vdash\bot}\;(\mathrm{Ax}^*),\ (\neg\,\mathrm{B})}{\neg\neg A,\neg A\vdash A}\;(\mathrm{Ax}^*),\ (\bot\,\mathrm{i})}{\neg\neg A\vdash A}\;(\lor\,\mathrm{B})}{\vdash\neg\neg A\to A}\;(\to\mathrm{E})$$

(iii) ⇒ (iv):

$$\dfrac{X\vdash\neg\neg A \qquad \vdash\neg\neg A\to A}{X\vdash A}\;(\to\mathrm{B})$$

(iv) ⇒ (i):

$$\dfrac{\dfrac{X,\neg A\vdash\bot}{X\vdash\neg\neg A}\;(\neg\,\mathrm{E})}{X\vdash A}\;(\neg\neg\,\mathrm{B})$$

LEMMA 2 (Beispiele für Herleitungen in N2):
Folgende Sequenzen sind herleitbar in N2:
B1: $\vdash\neg A\leftrightarrow(A\to\bot)$
B2: $\vdash\bot\leftrightarrow A\land\neg A$
B3: $\vdash A\lor\neg A$
B4: $\vdash((A\to B)\to A)\to A$
B5: $\vdash(A\to(A\to B))\to(A\to B)$
B6: $\vdash A\land\neg A\to B$
B7: $\vdash A\to(\neg A\to B)$
B8: $\vdash\neg A\to(\neg B\to\neg(A\lor B))$
B9: $\vdash(\neg A\to\bot)\to A$
B10: $A, A\to B\vdash B$
B11: $A, B\vdash A\land B$
B12: $A\to(B\to C)\vdash A\land B\to C$
Ax10: $\vdash(\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$
Ax11: $\vdash A\to(B\to A\land B)$
Ax12: $\vdash\bot\to A$
Ax13: $\vdash A\lor(A\to\bot)$

BEWEIS:
Siehe Abschnitt 5.1.6.

Erstes Hauptziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, daß N2 adäquat bzgl. der Aussagenlogik ist, d.h. daß gilt: $\vdash_{HF} A$ gdw $\vdash A$ ist in N2 herleitbar.

DEFINITION (Korrektheit, Vollständigkeit und Adäquatheit eines Kalküls N des Natürlichen Schliessens):
N heißt korrekt bzgl. AL gdw für alle A gilt: $\vdash A$ herleitbar in N ⇒ $\vdash_{HF} A$
N heißt vollständig bzgl. AL gdw für alle A gilt: $\vdash_{HF} A$ ⇒ $\vdash A$ herleitbar in N
N heißt adäquat (bzgl. AL) gdw N korrekt und vollständig bzgl. AL ist.

DEFINITION (die einer Sequenz $X \vdash A$ entsprechende Formel):
Die der Sequenz $X \vdash A$ entsprechende Formel $E(X\vdash A)$ wird definiert durch:
$X \neq \emptyset$: $E(X\vdash A) = \wedge X \rightarrow A$
$X = \emptyset$: $E(\emptyset\vdash A) = A$

LEMMA 3:
$X \vdash A$ herleitbar in N2 gdw $\vdash E(X\vdash A)$ herleitbar in N2

BEWEIS:
Siehe Abschnitt 5.1.6.

LEMMA 4 (Vollständigkeit von N2):
$\vdash_{HF} A \Rightarrow \vdash A$ herleitbar in N2

BEWEIS:
Herleitungsinduktion in PC bzw. H1:
Induktionsanfang: für alle Axiome Ax gilt: $\vdash Ax$ herleitbar in N2:
siehe Abschnitt 5.1.6.
Induktionsschritt: sind $\vdash A$ und $\vdash A\rightarrow B$ herleitbar in N2, dann auch $\vdash B$:
dies ist einfach die Regel ($\rightarrow$ B)

LEMMA 5 (Korrektheit von N2):
$\vdash A$ herleitbar in N2 $\Rightarrow \vdash_{HF} A$

BEWEIS:
Wir zeigen:
$X \vdash A \Rightarrow \vdash_{HF} E(X\vdash A)$ durch Herleitungsinduktion in N2:
Induktionsanfang:
$\vdash_{HF} E(A\vdash A)$, also $\vdash_{HF} A\rightarrow A$
Induktionsschritt:
Für alle Regeln <P1, (P2, P3,) K> des Kalküls N2 ist zu zeigen:
$\vdash_{HF} E(P1)$, $(\vdash_{HF} E(P2)$, $\vdash_{HF} E(P2),) \Rightarrow \vdash_{HF} E(K)$, so z.B. für ($\wedge$ B1):
$\vdash_{HF} E(X\vdash A\wedge B) \Rightarrow \vdash_{HF} E(X\vdash A)$, also $\vdash_{HF} X\rightarrow A\wedge B \Rightarrow \vdash_{HF} X\rightarrow A$

BEMERKUNG:
Falls wir die schwache Vollständigkeit der Aussagenlogik ($\models A \Rightarrow \vdash_{HF} A$) voraussetzen können, genügt es, durch Herleitungsinduktion zu zeigen, daß gilt:
$X \vdash A \Rightarrow \models E(X\vdash A)$
Induktionsanfang:
$\models A\rightarrow A$
Induktionsschritt z.B. für ($\wedge$ B1): $\models X\rightarrow A\wedge B \Rightarrow \models X\rightarrow A$
Daraus folgt insb. $\vdash A$ herleitbar in N2 $\Rightarrow \models A$.

BEMERKUNG:
Es gilt auch folgende Umkehrung:
$\vdash_{HF} E(X \vdash A) \Rightarrow X \vdash A$ ist herleitbar in N2, denn aus $\vdash_{HF} E(X \vdash A)$ folgt mit LEMMA 4: $\vdash E(X \vdash A)$ ist herleitbar, und daraus mit LEMMA 3: $X \vdash A$ ist herleitbar.

BEMERKUNG:
Für N2 zeigt man die Korrektheit vielleicht besser durch:
(i) syntaktisch: $X \vdash A$ herleitbar $\Rightarrow X \vdash_{HF} A$
d.h. man zeigt: $\vdash_{HF}$ ist abgeschlossen unter den Regeln von N2;
oder anders formuliert: die Regeln von N2 sind zulässig in $\vdash_{HF}$.
dies bedeutet in den meisten Fällen die direkte Anwendung der Axiome von H1:
Induktionsanfang: $A \vdash_{HF} A$;
Induktionsschritt:
($\wedge$ E): man muß zeigen, daß gilt: $\vdash_{HF} A \rightarrow (B \rightarrow (A \wedge B))$, d.i. Ax11
($\vee$ E1) und ($\vee$ E2): entspricht Ax5a bzw. Ax5b
($\rightarrow$ E): entspricht dem Deduktionstheorem
($\neg$ E): $\vdash_{HF} (A \rightarrow \bot) \rightarrow \neg A$, d.i. B1 (Implikation von rechts nach links)
($\wedge$ B1) und ($\wedge$B2): entspricht Ax3a bzw. Ax3b
($\vee$ B): entspricht Ax6
($\rightarrow$ B): entspricht dem Modus Ponens
($\neg$ B): $\vdash_{HF} \neg A \rightarrow (A \rightarrow \bot)$, d.i. B1 (Implikation von links nach rechts)
($\bot$ c): $\vdash_{HF} (\neg A \rightarrow \bot) \rightarrow A$, d.i. B9
(AB): (linke) Monotonie
(KÜ): klar

(ii) semantisch: $X \vdash A$ ist herleitbar $\Rightarrow X \models A$; da X endlich ist, braucht man nur die schwache Vollständigkeit der Aussagenlogik; für ($\wedge$ B1) etwa zeigt man: $X \models A \wedge B \Rightarrow X \models A$.

5.1.3 Die Beziehung zwischen N2 und S2

$X \vdash_N A$ bezeichne die Herleitbarkeit im Kalkül N2 des Natürlichen Schliessens, $X \vdash_S Y$ bezeichne die Herleitbarkeit im Sequenzenkalkül $S2^+$. Hauptziel dieses Abschnitts ist es, zu zeigen, daß gilt:

LEMMA 6:
$X \vdash_N A$ gdw $X \vdash_S A$

BEWEIS:
$X \vdash_N A \Rightarrow X \vdash_S A$:
der Beweis liefert sogar ein effektives Verfahren, um aus einer Herleitung in N2 eine solche in $S2^+$ zu konstruieren und verläuft durch Herleitungsinduktion in N2; anders formuliert sind die Regeln von N2 in $S2^+$ zulässig:
Induktionsanfang, Axiom:
$A \vdash_N A \Rightarrow A \vdash_S A$ ist klar;
Induktionsschritt:
die logischen Einführungsregeln von N2 entsprechen den rechten logischen Regeln von $S2^+$:
($\wedge$ E) entspricht ($\wedge$ R);
($\vee$ E1) entspricht ($\vee$ R1);
($\vee$ E2) entspricht ($\vee$ R2);
($\rightarrow$ E) entspricht ($\rightarrow$ R);
($\neg$ E):

$$\cfrac{\cfrac{X, A \vdash_S \bot \qquad \bot \vdash_S \emptyset}{X, A \vdash_S \emptyset}\ (\mathrm{CUT})}{X \vdash_S \neg A}\ (\neg\, \mathrm{R})$$

die logischen Beseitigungsregeln von N2 werden ersetzt durch entsprechende linke logische Regeln von $S2^+$ und einen Schnitt (alle Herleitungen in $S2^+$):
($\wedge$ B1):

$$\cfrac{X \vdash A\wedge B \qquad \cfrac{A \vdash A}{A\wedge B \vdash A}\ (\wedge\, \mathrm{L1})}{X \vdash A}\ (\mathrm{CUT})$$

($\wedge$ B2): analog

($\vee$ B):

$$\cfrac{X \vdash A\vee B \qquad \cfrac{\cfrac{Y, A \vdash C \qquad Z, B \vdash C}{Y, Z, A\vee B \vdash C, C}\ (\vee\, \mathrm{L})}{Y, Z, A\vee B \vdash C}\ (\mathrm{KÜ\ R})}{X, Y, Z \vdash C}\ (\mathrm{CUT})$$

($\rightarrow$ B):

$$\cfrac{X \vdash A\rightarrow B \qquad \cfrac{Y \vdash A \qquad B \vdash B}{Y, A\rightarrow B \vdash B}\ (\rightarrow \mathrm{L})}{X, Y \vdash B}\ (\mathrm{CUT})$$

($\neg$ B):

$$
\begin{array}{lll}
 & \underline{Y \vdash A} & \\
\underline{X \vdash \neg A \qquad Y, \neg A \vdash} & & (\neg\ L) \\
\quad X, Y \vdash & & (CUT) \\
\quad X, Y \ \vdash \bot & & (AB\ R)
\end{array}
$$

($\bot$ c): hier braucht man eine nichtintuitionistische Sequenz, u.z. $\vdash A, \neg A$:

$$
\begin{array}{lll}
\underline{X, \neg A \vdash \bot \quad \bot \vdash} & \underline{A \vdash A} & \\
\quad \underline{X, \neg A \vdash \qquad\qquad \vdash A, \neg A} & & (CUT), (\neg\ R) \\
\qquad X \vdash A & & (CUT)
\end{array}
$$

Strukturschlussregeln: klar.

$X \vdash_S A \Rightarrow X \vdash_N A$:
dies ist nicht direkt durch Herleitungsinduktion möglich, da als Induktionsvoraussetzung auch Sequenzen auftreten können, die rechts vom Sequenzenzeichen entweder keine Formel enthalten oder mehr als eine Formel enthalten (nichtintuitionistische Sequenzen); daher zeigen wir durch Herleitungsinduktion in $S2^+$ allgemein folgendes:
$X \vdash_S Y \Rightarrow X, \neg Y \vdash_N \bot$
wobei bei leerem Y auch $\neg$Y leer ist, und $\neg Y := \{\neg A \mathbin{/} A \in Y\}$
daraus folgt insbesondere:
$X \vdash_S A \Rightarrow X, \neg A \vdash_N \bot$
woraus mit ($\bot$ c) $X \vdash_N A$ folgt.
Auch hier liefert der Beweis ein effektives Verfahren, um aus einer Herleitung in $S2^+$ eine solche in N2 zu konstruieren und verläuft durch Herleitungsinduktion in $S2^+$; anders formuliert sind die Regeln von $S2^+$ in N2 zulässig (alle Herleitungen in N2, ohne Beweisbäume):

Induktionsanfang, Axiome:

$$
\begin{array}{lll}
p \vdash p: & \underline{p \vdash p \qquad\qquad \neg p \vdash \neg p} & (Ax^*) \\
 & \qquad p, \neg p \vdash \bot & (\neg\ B) \\
\bot \vdash: & \bot \vdash \bot & (Ax^*)
\end{array}
$$

Induktionsschritt:
Für die linken logischen Regeln von $S2^+$ nimmt man die entsprechenden Beseitigungsregeln von N2, und evtl. noch ($\neg$E), ($\neg$B) und ($\bot$ c):
($\wedge$ L1):

$$
\begin{array}{lll}
\underline{X, \neg Y, A \vdash \bot} & \underline{A \wedge B \vdash A \wedge B} & (IV), (Ax^*) \\
\underline{X, \neg Y \vdash \neg A \qquad\qquad A \wedge B \vdash A} & & (\neg\ E), (\wedge\ B) \\
\quad X, \neg Y, A \wedge B \vdash \bot & & (\neg\ B)
\end{array}
$$

($\wedge$ L2): analog

($\vee$ L):

$$
\begin{array}{ll}
\underline{X, \neg Y, A \vdash \bot \qquad Z, \neg U, B \vdash \bot \qquad A \vee B \vdash A \vee B} & (IV), (Ax^*) \\
\quad X, Z, \neg Y, \neg U, A \vee B \vdash \bot & (\vee\ B)
\end{array}
$$

($\rightarrow$ L):

$\underline{X, \neg Y, \neg A \vdash \bot}$		(IV)
$\underline{X, \neg Y \vdash A \quad\quad A\rightarrow B \vdash A\rightarrow B}$	$\underline{Z, \neg U, B \vdash \bot}$	($\bot$ c), (Ax*), (IV)
$\underline{\quad X, \neg Y, A\rightarrow B \vdash B \quad\quad\quad\quad\quad\quad}$	$\underline{Z, \neg U \vdash \neg B}$	($\rightarrow$ B), ($\neg$ E)
$\quad\quad X, Z, \neg Y, \neg U, A\rightarrow B \vdash \bot$		($\neg$ B)

($\neg$ L): klar

Für die rechten logischen Regeln von $S2^+$ nimmt man die entsprechenden Einführungsregeln von N2, ($\bot$ c) und ($\neg$B):

($\wedge$ R):

$\underline{X, \neg Y, \neg A \vdash \bot}$	$\underline{Z, \neg U, \neg B \vdash \bot}$	(IV)
$\underline{X, \neg Y \vdash A \quad\quad\quad\quad\quad\quad Z, \neg U \vdash B}$		($\bot$ c)
$\underline{\quad X, Z, \neg Y, \neg U \vdash A\wedge B \quad\quad\quad\quad \neg(A\wedge B) \vdash \neg(A\wedge B)}$		($\wedge$ E), (Ax*)
$\quad\quad X, Z, \neg Y, \neg U, \neg(A\wedge B) \vdash \bot$		($\neg$ B)

($\vee$ R1):

$\underline{X, \neg Y, \neg A \vdash \bot}$	(IV)
$\underline{X, \neg Y \vdash A}$	($\bot$ c)
$\underline{X, \neg Y \vdash A\vee B \quad\quad \neg(A\vee B) \vdash \neg(A\vee B)}$	($\vee$ E1), (Ax)
$\quad X, \neg Y, \neg(A\vee B) \vdash \bot$	($\neg$ B)

($\vee$ R2): analog

($\rightarrow$ R):

$\underline{X, \neg Y, A, \neg B \vdash \bot}$	(IV)
$\underline{X, \neg Y, A \vdash B}$	($\bot$ c)
$\underline{X, \neg Y \vdash A\rightarrow B \quad\quad \neg(A\rightarrow B) \vdash \neg(A\rightarrow B)}$	($\rightarrow$ E), (Ax*)
$\quad X, \neg Y, \neg(A\rightarrow B) \vdash \bot$	($\neg$ B)

($\neg$ R):

$\underline{X, \neg Y, A \vdash \bot}$	(IV)
$\underline{X, \neg Y \vdash \neg A \quad\quad \neg\neg A \vdash \neg\neg A}$	($\bot$ c), (Ax*)
$\quad X, \neg Y, \neg\neg A \vdash \bot$	($\neg$ B)

Schnittregel (CUT):

$\underline{X, \neg Y, \neg A \vdash \bot}$	$\underline{Z, \neg U, A \vdash \bot}$	(IV)
$\underline{X, \neg Y \vdash \neg\neg A \quad\quad Z, \neg U \vdash \neg A}$		($\neg$ E)
$\quad X, Z, \neg Y, \neg U \vdash \bot$		($\neg$ B)

Strukturschlussregeln: klar.

FOLGERUNG:
(i) $X \vdash A$ herleitbar in N2 gdw $X \vdash A$ herleitbar in S2
(ii) N2 ist adäquat bzgl. AL

5.1.4 Weitere Varianten von Kalkülen des Natürlichen Schliessens

Einzelne Varianten von Kalkülen des Natürlichen Schliessens können sich analog zu Varianten von Sequenzenkalkülen in folgenden Punkten voneinander unterscheiden:

(i) hinsichtlich der verwendeten Signatur:
Varianten N1 bis N6a (ausgenommen N5) werden in der Signatur $\{\bot, \neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ formuliert; N5 wird in der Signatur $\{\bot, \wedge, \rightarrow\}$ formuliert; N7 bis N12c werden in der Signatur $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ formuliert.

(ii) hinsichtlich des Begriffes der Sequenz (‚Sequenz‘, ‚KÜ‘, ‚VE‘):
Definierbar mit jeweils endlichen Folgen (dann braucht man Kürzungs- und Vertauschungsregeln), Multimengen (mit Kürzungs-, aber ohne Vertauschungsregeln), oder Mengen (ohne Kürzungs- und Vertauschungsregeln) von Formeln; wir betrachten auch hier wieder nur zwei Folgenvarianten (N1 und N1a), da sie sich von den Multimengenvarianten ausschliesslich durch die Verwendung der Vertauschungsregeln unterscheiden; bei zwei Varianten (N7 und N7a) betrachten wir auch unendliche Mengen.

(iii) hinsichtlich der zwei- bzw. dreiprämissigen Regeln (‚Kontext‘):
die Prämissen der Regeln können verschiedenen Kontext haben (Regel R) oder sie müssen gleichen Kontext haben (Regel Ra); wir betrachten Varianten S mit Regeln R und Varianten Sa mit Regeln Ra (N1 bis N6a); bei Varianten mit höheren Nummern erfolgt die Unterscheidung zwischen S und Sa nach anderen Kriterien, siehe Punkt (vi).

(iv) hinsichtlich der verwendeten Axiome (‚AB‘):
Man kann als Axiome annehmen: $A \vdash A$ (mit Abschwächungsregeln) oder $X, A \vdash A$ (ohne Abschwächungsregeln); manche Varianten nehmen auch nichttriviale Axiome der Gestalt $Y \vdash A$ an, doch kann man alle diese Axiome in Regeln übersetzen (wodurch eine grosse Vielfalt an Regeln entsteht); dies erscheint deshalb sinnvoll, da Kalküle des Natürlichen Schliessens der Intention nach Regel-Kalküle und keine Axiom-Regel-Kalküle sind.

(v) zu den Regeln allgemein:
hinsichtlich der Regeln gibt es im Vergleich zu Sequenzenkalkülen eine grössere Vielfalt; jedoch haben alle Kalküle gemeinsame Regeln, so etwa die Oder-Einführungsregeln; die Verschiedenheit der Regeln besteht eher in den Oder-Beseitigungsregeln und in den Negations-Beseitigungsregeln (Oder und Nicht haben ja auch etwa in der intuitionistischen Logik eine andere Bedeutung als in der klassischen Logik).

(vi) Bemerkungen zu den einzelnen Varianten:
Die Varianten N1 bis N6a sind analog zu den Sequenzenkalkülen gebildet; die Varianten N7 bis N10 enthalten teilweise neue Regeln und die Varianten N11 und N12 sind in der Kognitionswissenschaft von Bedeutung, da sie das Schliessen im Alltag zu modellieren versuchen.

ÜBERSICHT (über Varianten von Kalkülen des Natürlichen Schliessens):

Name	Sequenz	Kontext	AB	KÜ	VE	adäquat
N1	Folge	verschieden	ja	ja	ja	ja
N1a	Folge	gleich	ja	ja	ja	ja
N2	Multimenge	verschieden	ja	ja		ja
N2a	Multimenge	gleich	ja	ja		ja
N3	Multimenge	verschieden		ja		ja
N3a	Multimenge	gleich		ja		ja
N4	Multimenge	verschieden				nein
N4a	Multimenge	gleich				ja
N5	Multimenge					ja
$\mathcal{N}_{MM}$	Multimenge					ja
N6	Menge	verschieden	ja			ja
N6a	Menge	gleich	ja			ja
$\mathcal{N}_{M}$	Menge					ja
N7	Menge					ja
N7a	Menge					ja
N8	Menge					ja
N8a	Menge					ja
N9	Menge					ja
N9a	Menge					ja
N9b	Menge					ja
N9c	Menge					ja
N10	Menge					ja
N11	Menge					nein
N11a	Menge					ja
N12	Menge					?
N12a	Menge					?
N12b	Menge					?

5.1.5 Die Varianten N1 und N1a

Variante N1:

Ist X eine endliche Folge von Formeln und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome: $A \vdash A$ (Ax*)

Regeln:

logische Einführungsregeln

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash B}{X, Y \vdash A \wedge B} \quad (\wedge\ E)$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ E1)$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ E2)$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \rightarrow B} \quad (\rightarrow E)$$

$$\frac{X, A \vdash \bot}{X \vdash \neg A} \quad (\neg\ E)$$

logische Beseitigungsregeln

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash A} \quad (\wedge\ B1)$$

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash B} \quad (\wedge\ B2)$$

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad Y, A \vdash C \qquad Z, B \vdash C}{X, Y, Z, \vdash C} \quad (\vee\ B)$$

$$\frac{X \vdash A \rightarrow B \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \quad (\rightarrow B)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash \neg A}{X, Y \vdash \bot} \quad (\neg\ B)$$

Klassische Widerspruchsregel:

$$\frac{X, \neg A \vdash \bot}{X \vdash A} \quad (\bot\ c)$$

Strukturelle Regeln:

$$\frac{X \vdash B}{X, A \vdash B} \quad (AB)$$

$$\frac{X, A, A \vdash B}{X, A \vdash B} \quad (KÜ)$$

$$\frac{X, A, B, Y \vdash C}{X, B, A, Y \vdash C} \quad (VE)$$

Variante N1a:

Ist X eine endliche Folge von Formeln und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome: $A \vdash A$ (Ax*)

Regeln:

logische Einführungsregeln

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash B}{X \vdash A\wedge B} \qquad (\wedge\ \mathrm{Ea})$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A\vee B} \qquad (\vee\ \mathrm{E1})$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A\vee B} \qquad (\vee\ \mathrm{E2})$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A\rightarrow B} \qquad (\rightarrow \mathrm{E})$$

$$\frac{X, A \vdash \bot}{X \vdash \neg A} \qquad (\neg\ \mathrm{E})$$

logische Beseitigungsregeln

$$\frac{X \vdash A\wedge B}{X \vdash A} \qquad (\wedge\ \mathrm{B1})$$

$$\frac{X \vdash A\wedge B}{X \vdash B} \qquad (\wedge\ \mathrm{B2})$$

$$\frac{X \vdash A\vee B \qquad X, A \vdash C \qquad X, B \vdash C}{X \vdash C} \qquad (\vee\ \mathrm{Ba})$$

$$\frac{X \vdash A\rightarrow B \qquad X \vdash A}{X \vdash B} \qquad (\rightarrow \mathrm{Ba})$$

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash \neg A}{X \vdash \bot} \qquad (\neg\ \mathrm{Ba})$$

Klassische Widerspruchsregel:

$$\frac{X, \neg A \vdash \bot}{X \vdash A} \qquad (\bot\ \mathrm{c})$$

Strukturelle Regeln:

$$\frac{X \vdash B}{X, A \vdash B} \qquad (\mathrm{AB})$$

$$\frac{X, A, A \vdash B}{X, A \vdash B} \qquad (\mathrm{KÜ})$$

$$\frac{X, A, B, Y \vdash C}{X, B, A, Y \vdash C} \qquad (\mathrm{VE})$$

BEMERKUNG:
N1 entspricht NK von Heindorf (1994), wobei NK in der Signatur $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$ formuliert wurde; statt $\perp$ steht die leere Menge $\emptyset$; der Begriff der Sequenz ist dann folgendermassen zu modifizieren:
ist X eine endliche Folge von Formeln und A eine Formel, so sind $X \vdash A$ und $X \vdash \emptyset$ Sequenzen (es steht dann rechts vom Sequenzenzeichen $\vdash$ nicht mehr nur genau eine Formel).

LEMMA 7:
N1 und N1a sind beide äquivalent zu N2.

BEWEIS:
Analog zum Verhältnis von S1 zu S2 unterscheiden sich die Kalküle N1 und N2 nur durch Anwendungen der Vertauschungsregeln; bei Anwesenheit der Kürzungs- und Abschwächungsregeln sind wiederum N1 und N1a äquivalent.

5.1.6 Die Varianten N2 und N2a

DEFINITION (N2):
Ist X eine endliche Multimenge von Formeln und A eine Formel, so ist X $\vdash$ A eine Sequenz
N2 enthalte folgende Axiome und Grundschlussregeln:
Axiome: (Ax*)
Logische Einführungsregeln: ($\wedge$ E), ($\vee$ E1), ($\vee$ E2), ($\rightarrow$ E), ($\neg$ E)
Logische Beseitigungsregeln: ($\wedge$ B1), ($\wedge$ B2), ($\vee$ B), ($\rightarrow$ B), ($\neg$ B)
Widerspruchsregel: ($\bot$ c)
Strukturschlussregeln: (AB), (KÜ)

DEFINITION (N2a):
Ist X eine endliche Multimenge von Formeln und A eine Formel, so ist X $\vdash$ A eine Sequenz
N2 enthalte folgende Axiome und Grundschlussregeln:
Axiome: (Ax*)
Logische Einführungsregeln: ($\wedge$ Ea), ($\vee$ E1), ($\vee$ E2), ($\rightarrow$ E), ($\neg$ E)
Logische Beseitigungsregeln: ($\wedge$ B1), ($\wedge$ B2), ($\vee$ Ba), ($\rightarrow$ Ba), ($\neg$ Ba)
Widerspruchsregel: ($\bot$ c)
Strukturschlussregeln: (AB), (KÜ)

BEMERKUNG:
Die Varianten N2 und N2a sind äquivalent, da beide (AB) und (KÜ) enthalten.

BEWEIS von LEMMA 2 für N2:

B1: $\vdash \neg A \leftrightarrow (A \rightarrow \bot)$:

$\underline{A \vdash A \qquad \neg A \vdash \neg A}$	$\underline{A \vdash A \qquad A\rightarrow\bot \vdash A\rightarrow\bot}$	(Ax*)
$\underline{A, \neg A \vdash \bot}$	$\underline{A, A\rightarrow\bot \vdash \bot}$	($\neg$ B), ($\rightarrow$ B)
$\underline{\neg A \vdash A\rightarrow\bot}$	$\underline{A\rightarrow\bot \vdash \neg A}$	($\rightarrow$ E), ($\neg$ E)
$\underline{\vdash \neg A\rightarrow(A\rightarrow\bot)}$	$\underline{\vdash (A\rightarrow\bot)\rightarrow\neg A}$	($\rightarrow$ E)
$\vdash \neg A\leftrightarrow(A\rightarrow\bot)$		($\wedge$ E), (DEF $\leftrightarrow$)

Beweisbaum:

$\underline{A^{u} \qquad \neg A^{v}}$	$\underline{A^{w} \qquad A\rightarrow\bot^{x}}$	
$\underline{\bot}$	$\underline{\bot}$	($\neg$ B), ($\rightarrow$ B)
$\underline{A\rightarrow\bot}$	$\underline{\neg A}$	($\rightarrow$ E)^{u}, ($\neg$ E)^{w}
$\underline{\neg A\rightarrow(A\rightarrow\bot)}$	$\underline{(A\rightarrow\bot)\rightarrow\neg A}$	($\rightarrow$ E)^{v}, ($\rightarrow$ E)^{x}
$\neg A\leftrightarrow(A\rightarrow\bot)$		($\wedge$ E), (DEF $\leftrightarrow$)

B2: $\vdash \bot \leftrightarrow A\wedge\neg A$:

	$\underline{A\wedge\neg A \vdash A\wedge\neg A \qquad A\wedge\neg A \vdash A\wedge\neg A}$	(Ax*)
$\underline{\bot \vdash \bot \qquad \bot \vdash \bot}$	$\underline{A\wedge\neg A \vdash A \qquad A\wedge\neg A \vdash \neg A}$	(Ax*), ($\wedge$ B)
$\underline{\bot \vdash A \qquad \bot \vdash \neg A}$	$\underline{A\wedge\neg A, A\wedge\neg A \vdash \bot}$	($\bot$ i), ($\neg$ B)
$\underline{\bot \vdash A\wedge\neg A}$	$\underline{A\wedge\neg A \vdash \bot}$	($\wedge$ E), (KÜ)
$\underline{\vdash \bot\rightarrow A\wedge\neg A}$	$\underline{\vdash A\wedge\neg A\rightarrow\bot}$	($\rightarrow$ E)
$\vdash \bot\leftrightarrow A\wedge\neg A$		($\wedge$ E), (DEF $\leftrightarrow$)

Beweisbaum:

$\underline{\bot^u} \qquad \underline{\bot^u} \qquad\qquad \underline{A\wedge\neg A^v} \qquad \underline{A\wedge\neg A^v}$	
$\underline{A \qquad \neg A} \qquad\qquad \underline{A \qquad \neg A}$	$(\bot\ i), (\wedge\ B)$
$\underline{A\wedge\neg A} \qquad\qquad \underline{\bot}$	$(\wedge\ E), (\neg\ B)$
$\underline{\bot\to A\wedge\neg A \qquad\qquad A\wedge\neg A\to\bot}$	$(\to E)^u, (\to E)^v$
$\bot\leftrightarrow A\wedge\neg A$	$(\wedge\ E), (DEF \leftrightarrow)$

B3: $\vdash A\vee\neg A$ ($A\vee\neg A$ sei abgekürzt mit B):

$\underline{A \vdash A} \qquad\qquad \underline{\neg A \vdash \neg A}$	(Ax^*)
$\underline{A \vdash A\vee\neg A \quad \neg B \vdash \neg B} \qquad \underline{\neg A \vdash A\vee\neg A \quad \neg B \vdash \neg B}$	$(\vee\ E1), (Ax^*), (\vee\ E2)$
$\underline{A, \neg(A\vee\neg A) \vdash \bot} \qquad \underline{\neg A, \neg(A\vee\neg A) \vdash \bot}$	$(\neg\ B)$
$\underline{\neg(A\vee\neg A) \vdash \neg A \qquad \neg(A\vee\neg A) \vdash \neg\neg A}$	$(\neg\ E)$
$\underline{\neg(A\vee\neg A), \neg(A\vee\neg A) \vdash \bot}$	$(\neg\ B)$
$\underline{\neg(A\vee\neg A) \vdash \bot}$	(KÜ)
$\vdash A\vee\neg A$	$(\bot\ c)$

Beweisbaum:

$\underline{A^u} \qquad\qquad \underline{\neg A^v}$	
$\underline{A\vee\neg A \qquad \neg(A\vee\neg A)^w} \qquad \underline{A\vee\neg A \qquad \neg(A\vee\neg A)^w}$	$(\vee\ E1), (\vee\ E2)$
$\underline{\bot} \qquad\qquad \underline{\bot}$	$(\neg\ B)$
$\underline{\neg A \qquad\qquad \neg\neg A}$	$(\neg\ E)^u, (\neg\ E)^v$
$\underline{\bot}$	$(\neg\ B)$
$A\vee\neg A$	$(\bot\ c)^w$

B4: $\vdash ((A\to B)\to A)\to A$:

H_1:

$\underline{A \vdash A \qquad \neg A \vdash \neg A}$	(Ax^*)
$\underline{A, \neg A \vdash \bot}$	$(\neg\ B)$
$\underline{A, \neg A \vdash B}$	$(\bot\ i)$
$\underline{\neg A \vdash A\to B \qquad \neg(A\to B) \vdash \neg(A\to B)}$	$(\to E), (Ax^*)$
$\underline{\neg A, \neg(A\to B) \vdash \bot}$	$(\neg\ B)$
$\underline{\neg(A\to B) \vdash A}$	$(\bot\ c)$
$\vdash \neg(A\to B)\to A$	$(\to E)$

H_2:

$\underline{A\to B \vdash A\to B \qquad (A\to B)\to A \vdash (A\to B)\to A}$	(Ax^*)
$\underline{A\to B, (A\to B)\to A \vdash A \qquad\qquad \neg A \vdash \neg A}$	$(\to B), (Ax^*)$
$\underline{\neg A, A\to B, (A\to B)\to A \vdash \bot}$	$(\neg\ B)$
$\neg A, (A\to B)\to A \vdash \neg(A\to B)$	$(\neg\ E)$

$H_1 \qquad H_2$	
$\underline{\neg A, (A\to B)\to A \vdash A \qquad\qquad \neg A \vdash \neg A}$	$(\to B), (Ax^*)$
$\underline{\neg A, \neg A, (A\to B)\to A \vdash \bot}$	$(\neg\ B)$
$\underline{\neg A, (A\to B)\to A \vdash \bot}$	(KÜ)
$\underline{(A\to B)\to A \vdash A}$	$(\bot\ c)$
$\vdash ((A\to B)\to A)\to A$	$(\to E)$

Beweisbaum:

$\underline{A^u \quad \neg A^v}$	
$\underline{\bot}$	$(\neg\ B)$
$\underline{B}$	$(\bot\ i)$
$\underline{A\to B \qquad \neg(A\to B)^w} \qquad \underline{(A\to B)^x \qquad (A\to B)\to A^y}$	$(\to\ E)^u$
$\underline{\bot} \qquad \underline{A \qquad \neg A^z}$	$(\neg\ B), (\to\ B)$
$\underline{A} \qquad \underline{\bot}$	$(\bot\ c)^v, (\neg\ B)$
$\underline{\neg(A\to B)\to A} \qquad \underline{\neg(A\to B)}$	$(\to\ E)^w, (\neg\ E)^x$
$\underline{A \qquad \neg A^z}$	$(\to\ B)$
$\underline{\bot}$	$(\neg\ B)$
$\underline{A}$	$(\bot\ c)^z$
$((A\to B)\to A)\to A$	$(\to\ E)^y$

B5: $\vdash (A\to(A\to B))\to(A\to B)$:

$\underline{A \vdash A \qquad A\to(A\to B) \vdash A\to(A\to B)}$	(Ax*)
$\underline{A, A\to(A\to B) \vdash A\to B \qquad A \vdash A}$	$(\to\ B)$, (Ax*)
$\underline{A, A, A\to(A\to B) \vdash B}$	$(\to\ B)$
$\underline{A, A\to(A\to B) \vdash B}$	(KÜ)
$\underline{A\to(A\to B) \vdash A\to B}$	$(\to\ E)$
$\vdash (A\to(A\to B))\to(A\to B)$	$(\to\ E)$

Beweisbaum:

$\underline{A^u \qquad A\to(A\to B)^v}$	
$\underline{A^u \qquad A\to B}$	$(\to\ B)$
$\underline{B}$	$(\to\ B)$
$\underline{A\to B}$	$(\to\ E)^u$
$(A\to(A\to B))\to(A\to B)$	$(\to\ E)^v$

B6: $\vdash A\wedge\neg A\to B$:

$\underline{A\wedge\neg A \vdash A\wedge\neg A} \qquad \underline{A\wedge\neg A \vdash A\wedge\neg A}$	(Ax*)
$\underline{A\wedge\neg A \vdash A \qquad A\wedge\neg A \vdash \neg A}$	$(\wedge\ B)$
$\underline{A\wedge\neg A, A\wedge\neg A \vdash \bot}$	$(\neg\ B)$
$\underline{A\wedge\neg A \vdash \bot}$	(KÜ)
$\underline{A\wedge\neg A \vdash B}$	$(\bot\ i)$
$\vdash A\wedge\neg A\to B$	$(\to\ E)$

Beweisbaum:

$\underline{A\wedge\neg A^u} \qquad \underline{A\wedge\neg A^u}$	
$\underline{A \qquad \neg A}$	$(\wedge\ B)$
$\underline{\bot}$	$(\neg\ B)$
$\underline{B}$	$(\bot\ i)$
$A\wedge\neg A\to B$	$(\to\ E)^u$

B7: $\vdash A \to (\neg A \to B)$:

$\underline{A \vdash A \qquad \neg A \vdash \neg A}$ (Ax*)
$\underline{A, \neg A \vdash \bot}$ ($\neg$ B)
$\underline{A, \neg A \vdash B}$ ($\bot$ i)
$\underline{A \vdash \neg A \to B}$ ($\to$ E)
$\vdash A \to (\neg A \to B)$ ($\to$ E)

Beweisbaum:

$\underline{A^{u} \qquad \neg A^{v}}$
$\underline{\bot}$ ($\neg$ B)
$\underline{B}$ ($\bot$ i)
$\underline{\neg A \to B}$ $(\to E)^{v}$
$A \to (\neg A \to B)$ $(\to E)^{u}$

B8: $\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg(A \lor B))$:

$\underline{B \vdash B \qquad \neg B \vdash \neg B}$ (Ax*)
$\underline{B\ \neg B \vdash \bot}$ ($\neg$ B)
$\underline{A \lor B \vdash A \lor B \qquad B, \neg B \vdash A \qquad A \vdash A}$ (Ax*), ($\bot$ i), (Ax*)
$\underline{A \lor B, \neg B \vdash A \qquad \neg A \vdash \neg A}$ ($\lor$ B), (Ax*)
$\underline{A \lor B, \neg B, \neg A \vdash \bot}$ ($\neg$ B)
$\underline{\neg B, \neg A \vdash \neg(A \lor B)}$ ($\neg$ E)
$\underline{\neg A \vdash \neg B \to \neg(A \lor B)}$ ($\to$ E)
$\vdash \neg A \to (\neg B \to \neg(A \lor B))$ ($\to$ E)

Beweisbaum:

$\underline{B^{u} \qquad \neg B^{v}}$
$\underline{\bot}$ ($\neg$ B)
$\underline{A \lor B^{w} \qquad A \qquad A^{x}}$ ($\bot$ i)
$\underline{A \qquad \neg A^{y}}$ $(\lor B)^{u,\,x}$
$\underline{\bot}$ ($\neg$ B)
$\underline{\neg(A \lor B)}$ $(\neg E)^{w}$
$\underline{\neg B \to \neg(A \lor B)}$ $(\to E)^{v}$
$\neg A \to (\neg B \to \neg(A \lor B))$ $(\to E)^{y}$

B9: $\vdash (\neg A \to \bot) \to A$:

$\underline{\neg A \vdash \neg A \qquad \neg A \to \bot \vdash \neg A \to \bot}$ (Ax*)
$\underline{\neg A, \neg A \to \bot \vdash \bot}$ ($\to$ B)
$\underline{\neg A \to \bot \vdash A}$ ($\bot$ c)
$\vdash (\neg A \to \bot) \to A$ ($\to$ E)

Beweisbaum:

$\underline{\neg A^{u} \qquad \neg A \to \bot^{v}}$
$\underline{\bot}$ ($\to$ B)
$\underline{A}$ $(\bot c)^{u}$
$(\neg A \to \bot) \to A$ $(\to E)^{v}$

B10: $A, A\to B \vdash B$:

$$\begin{array}{ll}
\underline{A \vdash A \qquad\quad A\to B \vdash A\to B} & (Ax^*) \\
\qquad A, A\to B \vdash B & (\to B)
\end{array}$$

Beweisbaum:

$$\begin{array}{ll}
\underline{A \qquad\qquad\quad A\to B} & \\
\qquad B & (\to B)
\end{array}$$

B11: $A, B \vdash A\wedge B$:

$$\begin{array}{ll}
\underline{A \vdash A \qquad\quad B \vdash B} & (Ax^*) \\
A, B \vdash A\wedge B & (\wedge E)
\end{array}$$

Beweisbaum:

$$\begin{array}{ll}
\underline{A \qquad\qquad\quad B} & \\
\qquad A\wedge B & (\wedge E)
\end{array}$$

B12: $A\to(B\to C) \vdash A\wedge B\to C$:

$$\begin{array}{lll}
 & \underline{A\wedge B \vdash A\wedge B\quad} & (Ax^*) \\
\underline{A\wedge B \vdash A\wedge B} & \underline{A\wedge B \vdash A \qquad A\to(B\to C) \vdash A\to(B\to C)} & (Ax^*), (\wedge B1), (Ax^*) \\
\underline{A\wedge B \vdash B} & \underline{A\wedge B, A\to(B\to C) \vdash B\to C} & (\wedge B2), (\to B) \\
\multicolumn{2}{l}{\qquad \underline{A\wedge B, A\wedge B, A\to(B\to C) \vdash C}} & (\to B) \\
\multicolumn{2}{l}{\qquad \underline{A\wedge B, A\to(B\to C) \vdash C}} & (KÜ) \\
\multicolumn{2}{l}{\qquad A\to(B\to C) \vdash A\wedge B\to C} & (\to E)
\end{array}$$

Beweisbaum:

$$\begin{array}{lll}
 & \underline{A\wedge B^{u}} & \\
\underline{A\wedge B^{u}} & \underline{A \qquad\qquad A\to(B\to C)} & (\wedge B1), \text{Annahme} \\
\multicolumn{2}{l}{\underline{B \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad B\to C}} & (\wedge B2), (\to B) \\
\multicolumn{2}{l}{\qquad\qquad \underline{C}} & (\to B) \\
\multicolumn{2}{l}{\qquad\qquad A\wedge B\to C} & (\to E)^{u}
\end{array}$$

Ax10: $\vdash (\neg A\to\neg B)\to(B\to A)$:

$$\begin{array}{lll}
\underline{\neg A \vdash \neg A \qquad \neg A\to\neg B \vdash \neg A\to\neg B} & & (Ax^*) \\
\underline{\neg A, \neg A\to\neg B \vdash \neg B \qquad\qquad \neg\neg B \vdash \neg\neg B} & & (\to B), (Ax^*) \\
\qquad \underline{\neg A, \neg A\to\neg B, \neg\neg B \vdash \bot} & \underline{B \vdash B \qquad\qquad \neg B \vdash \neg B} & (\neg B), (Ax^*) \\
\qquad \underline{\neg A\to\neg B, \neg\neg B \vdash A} & \qquad\quad \underline{B, \neg B \vdash \bot} & (\bot c), (\neg B) \\
\qquad \underline{\neg A\to\neg B \vdash \neg\neg B\to A \qquad\qquad\qquad} & \underline{\qquad\quad B \vdash \neg\neg B} & (\to E), (\neg E) \\
\qquad\qquad \underline{\neg A\to\neg B, B \vdash A} & & (\to B) \\
\qquad\qquad \underline{\neg A\to\neg B \vdash B\to A} & & (\to E) \\
\qquad\qquad \vdash (\neg A\to\neg B)\to(B\to A) & & (\to E)
\end{array}$$

Beweisbaum:

$\neg A^{u} \quad \neg A \to \neg B^{v}$	
$\neg B \quad \neg\neg B^{w}$	$(\to B)$
$\bot \quad B^{x} \quad \neg B^{y}$	$(\neg B)$
$A \quad \bot$	$(\bot c)^{u}, (\neg B)$
$\neg\neg B \to A \quad \neg\neg B$	$(\to E)^{w}, (\neg E)^{y}$
A	$(\to B)$
$B \to A$	$(\to E)^{x}$
$(\neg A \to \neg B) \to (B \to A)$	$(\to E)^{v}$

Ax11: $\vdash A \to (B \to A \wedge B)$:

$A, B \vdash A \wedge B$	B11
$A \vdash B \to A \wedge B$	$(\to E)$
$\vdash A \to (B \to A \wedge B)$	$(\to E)$

Beweisbaum:

$A^{u} \quad B^{v}$	
$A \wedge B$	$(\wedge E)$
$B \to A \wedge B$	$(\to E)^{v}$
$A \to (B \to A \wedge B)$	$(\to E)^{u}$

Ax12: $\vdash \bot \to A$:

$\bot \vdash \bot$	(Ax*)
$\bot \vdash A$	$(\bot i)$
$\vdash \bot \to A$	$(\to E)$

Beweisbaum:

$\bot^{u}$	
A	$(\bot i)$
$\bot \to A$	$(\to E)^{u}$

Ax13: $\vdash A \vee (A \to \bot)$ ($A \vee (A \to \bot)$ sei abgekürzt mit B):

$A \vdash A \quad\quad A \to \bot \vdash A \to \bot$	(Ax*)
$A \vdash B \quad \neg B \vdash \neg B \quad\quad A \to \bot \vdash B \quad \neg B \vdash \neg B$	$(\vee E1), (\vee E2)$, (Ax*)
$A, \neg B \vdash \bot \quad\quad A \to \bot, \neg B \vdash \bot$	$(\neg B)$
$\neg B \vdash A \to \bot \quad\quad \neg B \vdash (A \to \bot) \to \bot$	$(\to E)$
$\neg B, \neg B \vdash \bot$	$(\to B)$
$\neg\, A \vee (A \to \bot) \vdash \bot$	(KÜ)
$\vdash A \vee (A \to \bot)$	$(\bot c)$

Beweisbaum:

$\underline{A^u}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\underline{A\to\bot^v}$

$\underline{A\lor(A\to\bot) \quad \neg A\lor(A\to\bot)^w}$ $\qquad$ $\underline{A\lor(A\to\bot) \quad \neg A\lor(A\to\bot)^w}$ $\qquad$ $(\lor E1), (\lor E2)$

$\qquad\qquad \underline{\bot}$ $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\bot}$ $\qquad$ $(\neg B)$

$\qquad\qquad \underline{A\to\bot \qquad\qquad\qquad\qquad (A\to\bot)\to\bot}$ $\qquad$ $(\to E)^u, (\to E)^v$

$\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{\bot}$ $\qquad$ $(\to B)$

$\qquad\qquad\qquad A\lor(A\to\bot)$ $\qquad$ $(\bot c)^w$

BEWEIS von LEMMA 3 für N2:

$\Rightarrow$: es gilt (*):

$\underline{B, C \vdash A}$

$B\land C \vdash A$

daraus folgt mit Vollständiger Induktion:

$\underline{X \vdash A}$

$\underline{\land X \vdash A}$ $\qquad$ und

$\vdash \land X\to A$ $\qquad$ $(\to E)$

(*): $\qquad$ $\underline{B\land C \vdash B\land C \qquad B, C \vdash A}$ $\qquad$ (Ax*), Annahme

$\qquad\qquad$ $\underline{B\land C \vdash B \qquad\qquad C \vdash B\to A}$ $\qquad$ $(\land B), (\to E)$

$\underline{B\land C\vdash B\land C}$ $\qquad\qquad$ $\underline{B\land C, C \vdash A}$ $\qquad$ $(Ax^*), (\to B)$

$\underline{B\land C \vdash C \qquad\qquad\qquad\qquad B\land C \vdash C\to A}$ $\qquad$ $(\land B), (\to E)$

$\qquad$ $\underline{B\land C, B\land C \vdash A}$ $\qquad$ $(\to B)$

$\qquad$ $B\land C \vdash A$ $\qquad$ (KÜ)

Beweisbaum für (*):

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \underline{B^u \qquad C^v}$

$\qquad\qquad \underline{B\land C}$ $\qquad\qquad \underline{A}$ $\qquad$ Annahme

$\qquad\qquad \underline{B \qquad\qquad\qquad B\to A}$ $\qquad$ $(\land B), (\to E)^u$

$\underline{B\land C}$ $\qquad\qquad\qquad \underline{A}$ $\qquad$ $(\to B)$

$\underline{C \qquad\qquad\qquad\qquad C\to A}$ $\qquad$ $(\land B), (\to E)^v$

$\qquad\qquad A$ $\qquad$ $(\to B)$

$\Leftarrow$: es gilt:

$\underline{A \vdash A \qquad\qquad B \vdash B}$

$A, B \vdash A\land B$ $\qquad$ $(\land E)$

daraus mit Vollständiger Induktion:

$\underline{X \vdash \land X \qquad\qquad \vdash \land X\to A}$ $\qquad$ Annahme

$X \vdash A$ $\qquad$ $(\to B)$

BEWEIS von LEMMA 4 für N2:

Ax 1: $\vdash A\to(B\to A)$:

$\underline{A \vdash A}$ $\qquad$ (Ax*)

$\underline{B, A \vdash A}$ $\qquad$ (AB)

$\underline{A \vdash B\to A}$ $\qquad$ $(\to E)$

$\vdash A\to(B\to A)$ $\qquad$ $(\to E)$

Beweisbaum:

$\underline{A^u}$

$\underline{B\to A}$ $\qquad (\to E)^v$

$A\to(B\to A)$ $\qquad (\to E)^u$

Ax2: $\vdash (A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$:

$\underline{A \vdash A \qquad A\to(B\to C) \vdash A\to(B\to C) \qquad A \vdash A \qquad A\to B \vdash A\to B}$ $\qquad$ (Ax*)

$\underline{A, A\to(B\to C) \vdash B\to C \qquad\qquad A, A\to B \vdash B}$ $\qquad (\to B)$

$\underline{A, A, A\to B, A\to(B\to C) \vdash C}$ $\qquad (\to B)$

$\underline{A, A\to B, A\to(B\to C) \vdash C}$ $\qquad$ (KÜ)

$\underline{A\to B, A\to(B\to C) \vdash A\to C}$ $\qquad (\to E)$

$\underline{A\to(B\to C) \vdash (A\to B)\to(A\to C)}$ $\qquad (\to E)$

$\vdash (A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$ $\qquad (\to E)$

Beweisbaum:

$\underline{A^u \qquad A\to(B\to C)^v} \qquad \underline{A^u \qquad A\to B^w}$

$\underline{B\to C \qquad\qquad B}$ $\qquad (\to B)$

$\underline{C}$ $\qquad (\to B)$

$\underline{A\to C}$ $\qquad (\to E)^u$

$\underline{(A\to B)\to(A\to C)}$ $\qquad (\to E)^w$

$(A\to(B\to C))\to((A\to B)\to(A\to C))$ $\qquad (\to E)^v$

Ax3a: $\vdash A\wedge B\to A$:

$\underline{A\wedge B \vdash A\wedge B}$ $\qquad$ (Ax*)

$\underline{A\wedge B \vdash A}$ $\qquad (\wedge B)$

$\vdash A\wedge B\to A$ $\qquad (\to E)$

Beweisbaum:

$\underline{A\wedge B^u}$

$\underline{A}$ $\qquad (\wedge B)$

$A\wedge B\to A$ $\qquad (\to E)^u$

Ax3b: $\vdash A\wedge B\to B$:
analog

Ax4: $\vdash (A\to B)\to((A\to C)\to(A\to B\wedge C))$:

$\underline{A \vdash A \qquad A\to B \vdash A\to B} \qquad \underline{A \vdash A \qquad A\to C \vdash A\to C}$ $\qquad$ (Ax*)

$\underline{A, A\to B \vdash B \qquad\qquad A, A\to C \vdash C}$ $\qquad (\to B)$

$\underline{A, A, A\to B, A\to C \vdash B\wedge C}$ $\qquad (\wedge E)$

$\underline{A, A\to B, A\to C \vdash B\wedge C}$ $\qquad$ (KÜ)

$\underline{A\to B, A\to C \vdash A\to B\wedge C}$ $\qquad (\to E)$

$\underline{A\to B \vdash (A\to C)\to(A\to B\wedge C)}$ $\qquad (\to E)$

$\vdash (A\to B)\to((A\to C)\to(A\to B\wedge C))$ $\qquad (\to E)$

Beweisbaum:

$\underline{A^u \quad A\to B^v} \qquad \underline{A^u \quad A\to C^w}$

$\underline{B \qquad\qquad C}$ (→ B)

$\underline{B\wedge C}$ (∧ E)

$\underline{A\to B\wedge C}$ $(\to E)^u$

$\underline{(A\to C)\to(A\to B\wedge C)}$ $(\to E)^w$

$(A\to B)\to((A\to C)\to(A\to B\wedge C))$ $(\to E)^v$

Ax5a: $\vdash A\to A\vee B$:

$\underline{A \vdash A}$ (Ax*)

$\underline{A \vdash A\vee B}$ (∨ E)

$\vdash A\to A\vee B$ (→ E)

Beweisbaum:

$\underline{A^u}$

$\underline{A\vee B}$ (∨ E)

$A\to A\vee B$ $(\to E)^u$

Ax5b: $\vdash B\to A\vee B$:

analog

Ax6: $\vdash (A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$:

$\underline{A \vdash A \quad A\to C \vdash A\to C} \qquad \underline{B \vdash B \quad B\to C \vdash B\to C}$ (Ax*)

$\underline{A\vee B \vdash A\vee B \qquad A, A\to C \vdash C \qquad B, B\to C \vdash C}$ (Ax*), (→ B)

$\underline{A\vee B, A\to C, B\to C \vdash C}$ (∨ B)

$\underline{A\to C, B\to C \vdash A\vee B\to C}$ (→ E)

$\underline{A\to C \vdash (B\to C)\to(A\vee B\to C)}$ (→ E)

$\vdash (A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$ (→ E)

Beweisbaum:

$\underline{A^u \quad A\to C^v} \qquad \underline{B^w \quad B\to C^x}$

$\underline{A\vee B^y \qquad C \qquad C}$ (→ B)

$\underline{C}$ $(\vee B)^{u, w}$

$\underline{A\vee B\to C}$ $(\to E)^y$

$\underline{(B\to C)\to(A\vee B\to C)}$ $(\to E)^x$

$(A\to C)\to((B\to C)\to(A\vee B\to C))$ $(\to E)^v$

Ax7: $\vdash ((A\to\neg B)\to((A\to B) \to\neg A))$:

$\underline{A \vdash A \qquad A\to B \vdash A\to B} \qquad \underline{A \vdash A \qquad A\to\neg B \vdash A\to\neg B}$ (Ax*)

$\underline{A, A\to B \vdash B \qquad A, A\to\neg B \vdash \neg B}$ (→ B)

$\underline{A, A, A\to B, A\to\neg B \vdash \bot}$ (¬ B)

$\underline{A, A\to B, A\to\neg B \vdash \bot}$ (KÜ)

$\underline{A\to B, A\to\neg B \vdash \neg A}$ (¬ E)

$\underline{A\to\neg B \vdash (A\to B)\to\neg A}$ (→ E)

$\vdash (A\to\neg B)\to((A\to B)\to\neg A)$ (→ E)

Beweisbaum:

$\underline{A^u \qquad A\to B^v} \qquad \underline{A^u \qquad A\to\neg B^w}$		
$\underline{B \qquad\qquad \neg B}$		$(\to B)$
$\underline{\bot}$		$(\neg B)$
$\underline{\neg A}$		$(\neg E)^u$
$\underline{(A\to B)\to\neg A}$		$(\to E)^v$
$(A\to\neg B)\to((A\to B)\to\neg A)$		$(\to E)^w$

Ax8: $\vdash \neg\neg A\to A$:

$\underline{\neg A \vdash \neg A \qquad \neg\neg A \vdash \neg\neg A}$	(Ax^*)
$\underline{\neg A, \neg\neg A \vdash \bot}$	$(\neg B)$
$\underline{\neg\neg A \vdash A}$	$(\bot c)$
$\vdash \neg\neg A\to A$	$(\to E)$

Beweisbaum:

$\underline{\neg A^u \qquad \neg\neg A^v}$	
$\underline{\bot}$	$(\neg B)$
$\underline{A}$	$(\bot c)^u$
$\neg\neg A\to A$	$(\to E)^v$

Ax9: $\vdash ((A\to\bot)\to\bot)\to A$:

$\underline{A \vdash A \qquad \neg A \vdash \neg A}$	(Ax^*)
$\underline{A, \neg A \vdash \bot}$	$(\neg B)$
$\underline{\neg A \vdash A\to\bot \qquad (A\to\bot)\to\bot \vdash (A\to\bot)\to\bot}$	$(\to E)$, (Ax^*)
$\underline{\neg A, (A\to\bot)\to\bot \vdash \bot}$	$(\to B)$
$\underline{(A\to\bot)\to\bot \vdash A}$	$(\bot c)$
$\vdash ((A\to\bot)\to\bot)\to A$	$(\to E)$

Beweisbaum:

$A^u \qquad \neg A^v$	
$\bot$	$(\neg B)$
$A\to\bot \qquad (A\to\bot)\to\bot^w$	$(\to E)^u$
$\bot$	$(\to B)$
A	$(\bot c)^v$
$((A\to\bot)\to\bot)\to A$	$(\to E)^w$

Variante N2:

Ist X eine endliche Multimenge von Formeln und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome:
$A \vdash A$ (Ax*)

Logische Regeln:

logische Einführungsregeln

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash B}{X, Y \vdash A \wedge B} \quad (\wedge\ E)$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ E1)$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ E2)$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \rightarrow B} \quad (\rightarrow E)$$

$$\frac{X, A \vdash \bot}{X \vdash \neg A} \quad (\neg\ E)$$

logische Beseitigungsregeln

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash A} \quad (\wedge\ B1)$$

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash B} \quad (\wedge\ B2)$$

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad Y, A \vdash C \qquad Z, B \vdash C}{X, Y, Z, \vdash C} \quad (\vee\ B)$$

$$\frac{X \vdash A \rightarrow B \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \quad (\rightarrow B)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash \neg A}{X, Y \vdash \bot} \quad (\neg\ B)$$

Klassische Widerspruchsregel:

$$\frac{X, \neg A \vdash \bot}{X \vdash A} \quad (\bot\ c)$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash B}{X, A \vdash B} \quad (AB)$$

$$\frac{X, A, A \vdash B}{X, A \vdash B} \quad (KÜ)$$

Variante N2a:

Ist X eine endliche Multimenge von Formeln und A eine Formel, so ist X $\vdash$ A eine Sequenz

Axiome:
A $\vdash$ A (Ax*)

Logische Regeln:

logische Einführungsregeln

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash B}{X \vdash A\wedge B} \quad (\wedge\ \text{Ea})$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A\vee B} \quad (\vee\ \text{E1})$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A\vee B} \quad (\vee\ \text{E2})$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A\to B} \quad (\to\ \text{E})$$

$$\frac{X, A \vdash \bot}{X \vdash \neg A} \quad (\neg\ \text{E})$$

logische Beseitigungsregeln

$$\frac{X \vdash A\wedge B}{X \vdash A} \quad (\wedge\ \text{B1})$$

$$\frac{X \vdash A\wedge B}{X \vdash B} \quad (\wedge\ \text{B2})$$

$$\frac{X \vdash A\vee B \qquad X, A \vdash C \qquad X, B \vdash C}{X \vdash C} \quad (\vee\ \text{Ba})$$

$$\frac{X \vdash A\to B \qquad X \vdash A}{X \vdash B} \quad (\to\ \text{Ba})$$

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash \neg A}{X \vdash \bot} \quad (\neg\ \text{Ba})$$

Klassische Widerspruchsregel:

$$\frac{X, \neg A \vdash \bot}{X \vdash A} \quad (\bot\ \text{c})$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash B}{X, A \vdash B} \quad (\text{AB})$$

$$\frac{X, A, A \vdash B}{X, A \vdash B} \quad (\text{KÜ})$$

5.1.7 Die Varianten N3 und N3a

Variante N3:

Ist X eine endliche Multimenge von Formeln und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome: $X, A \vdash A$

Regeln:

logische Einführungsregeln

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash B}{X, Y \vdash A \wedge B} \quad (\wedge\ E)$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ E1)$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ E2)$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \to B} \quad (\to E)$$

$$\frac{X, A \vdash \bot}{X \vdash \neg A} \quad (\neg\ E)$$

logische Beseitigungsregeln

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash A} \quad (\wedge\ B1)$$

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash B} \quad (\wedge\ B2)$$

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad Y, A \vdash C \qquad Z, B \vdash C}{X, Y, Z, \vdash C} \quad (\vee\ B)$$

$$\frac{X \vdash A \to B \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \quad (\to B)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash \neg A}{X, Y \vdash \bot} \quad (\neg\ B)$$

Klassische Widerspruchsregel:

$$\frac{X, \neg A \vdash \bot}{X \vdash A} \quad (\bot\ c)$$

Strukturelle Regel:

$$\frac{X, A, A \vdash B}{X, A \vdash B} \quad (\text{KÜ})$$

Variante N3a:

Ist X eine endliche Multimenge von Formeln und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome: $X, A \vdash A$

Regeln:

logische Einführungsregeln

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash B}{X \vdash A \wedge B} \quad (\wedge\ \text{Ea})$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ \text{E1})$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ \text{E2})$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \to B} \quad (\to\ \text{E})$$

$$\frac{X, A \vdash \bot}{X \vdash \neg A} \quad (\neg\ \text{E})$$

logische Beseitigungsregeln

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash A} \quad (\wedge\ \text{B1})$$

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash B} \quad (\wedge\ \text{B2})$$

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad X, A \vdash C \qquad X, B \vdash C}{X \vdash C} \quad (\vee\ \text{Ba})$$

$$\frac{X \vdash A \to B \qquad X \vdash A}{X \vdash B} \quad (\to\ \text{Ba})$$

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash \neg A}{X \vdash \bot} \quad (\neg\ \text{Ba})$$

Klassische Widerspruchsregel:

$$\frac{X, \neg A \vdash \bot}{X \vdash A} \quad (\bot\ \text{c})$$

Strukturelle Regel:

$$\frac{X, A, A \vdash B}{X, A \vdash B} \quad (\text{KÜ})$$

LEMMA 8:
Die Abschwächungsregeln sind zulässig in N3 und N3a.

BEWEIS:
Es gilt sogar: $X \vdash_n A \Rightarrow X, Z \vdash_n A$;
der Beweis erfolgt durch Herleitungsinduktion als ÜBUNG.

FOLGERUNG:
N3 und N3a sind beide äquivalent zu N2.

5.1.8 Die Varianten N4 und N4a

Variante N4:

Ist X eine endliche Multimenge von Formeln und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome: $X, A \vdash A$

Regeln:

logische Einführungsregeln

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash B}{X, Y \vdash A \wedge B} \quad (\wedge\ E)$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ E1)$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ E2)$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \rightarrow B} \quad (\rightarrow E)$$

$$\frac{X, A \vdash \bot}{X \vdash \neg A} \quad (\neg\ E)$$

logische Beseitigungsregeln

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash A} \quad (\wedge\ B1)$$

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash B} \quad (\wedge\ B2)$$

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad Y, A \vdash C \qquad Z, B \vdash C}{X, Y, Z, \vdash C} \quad (\vee\ B)$$

$$\frac{X \vdash A \rightarrow B \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \quad (\rightarrow B)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash \neg A}{X, Y \vdash \bot} \quad (\neg\ B)$$

Klassische Widerspruchsregel:

$$\frac{X, \neg A \vdash \bot}{X \vdash A} \quad (\bot\ c)$$

Variante N4a:

Ist X eine endliche Multimenge von Formeln und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome: $X, A \vdash A$

Regeln:

logische Einführungsregeln

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash B}{X \vdash A \wedge B} \qquad (\wedge\ Ea)$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B} \qquad (\vee\ E1)$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A \vee B} \qquad (\vee\ E2)$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \rightarrow B} \qquad (\rightarrow E)$$

$$\frac{X, A \vdash \bot}{X \vdash \neg A} \qquad (\neg\ E)$$

logische Beseitigungsregeln

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash A} \qquad (\wedge\ B1)$$

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash B} \qquad (\wedge\ B2)$$

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad X, A \vdash C \qquad X, B \vdash C}{X \vdash C} \qquad (\vee\ Ba)$$

$$\frac{X \vdash A \rightarrow B \qquad X \vdash A}{X \vdash B} \qquad (\rightarrow Ba)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash \neg A}{X \vdash \bot} \qquad (\neg\ Ba)$$

Klassische Widerspruchsregel:

$$\frac{X, \neg A \vdash \bot}{X \vdash A} \qquad (\bot\ c)$$

LEMMA 9:
(i) N4 ist unvollständig
(ii) N4a ist adäquat.

BEWEIS:
(i) Analog zu S4 ist etwa Ax 2 nicht herleitbar; ÜBUNG.
(ii) ÜBUNG.

5.1.9 Die Variante N5

Dieser Kalkül ist formuliert in der Signatur $\{\bot, \wedge, \to\}$ ($\neg A$ wird definiert als $A\to\bot$, $A\vee B$ wird definiert als $((A\to\bot)\to B)$ und hat folgende Axiome und Regeln:

Ist X eine endliche Multimenge von Formeln und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome: $A \vdash A$ (Ax*)

Regeln:

logische Einführungsregeln

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash B}{X, Y \vdash A\wedge B} \quad (\wedge\ E)$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A\to B} \quad (\to E)$$

logische Beseitigungsregeln

$$\frac{X \vdash A\wedge B}{X \vdash A} \quad (\wedge\ B1)$$

$$\frac{X \vdash A\wedge B}{X \vdash B} \quad (\wedge\ B2)$$

$$\frac{X \vdash A\to B \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \quad (\to B)$$

Klassische Widerspruchsregel:

$$\frac{X, \neg A \vdash \bot}{X \vdash A} \quad (\bot\ c)$$

Strukturelle Regeln:

$$\frac{X \vdash B}{X, A \vdash B} \quad (AB)$$

$$\frac{X, A, A \vdash B}{X, A \vdash B} \quad (KÜ)$$

BEMERKUNG:
Dieser Kalkül entspricht dem Kalkül C‘ von Prawitz (1965), der dort allerdings als Kalkül zur Konstruktion von Beweisbäumen formuliert wurde.

LEMMA 10:
N5 ist adäquat

BEWEIS:
ÜBUNG

Syntaktisch gesehen ist das wichtigste metalogische Theorem für Kalküle des Natürlichen Schliessens der Normalisierungssatz, der erstmals von Prawitz (1965) für N5 bewiesen wurde und dem Hauptsatz von Gentzen für Sequenzenkalküle entspricht.

Wir beschränken uns hier auf einige Bemerkungen und verweisen den interessierten Leser auf Prawitz (1965), Troelstra /Schwichtenberg (1996) bzw. Stålmarck (1991).

LEMMA 11:
Sei H eine Herleitung von $X \vdash A$ in N5; dann gibt es eine Herleitung H* von $X \vdash A$ in N5, wobei die Anwendungen von ($\perp$ c) auf Aussagenvariablen p eingeschränkt werden können.

BEWEIS:
Induktion nach g(A):
$A = B \wedge C$:
eine Herleitung:

$$
\begin{array}{ll}
\quad H & \\
\quad \ldots & \\
\underline{X, \neg(B\wedge C) \vdash \perp} & \\
X \vdash B\wedge C & (\perp\ c)
\end{array}
$$

transformiert sich in:

$$
\begin{array}{llllll}
\quad H & H_1 & & \quad H & H_2 & \\
\underline{X, \neg(B\wedge C) \vdash \perp} & \ldots & & \underline{X, \neg(B\wedge C) \vdash \perp} & \ldots & \\
\underline{X \vdash \neg(B\wedge C)\to\perp} & \underline{\neg B \vdash \neg(B\wedge C)} & & \underline{X \vdash \neg(B\wedge C)\to\perp} & \underline{\neg C \vdash \neg(B\wedge C)} & \\
\quad \underline{X, \neg B \vdash \perp} & & & \quad \underline{X, \neg C \vdash \perp} & & \\
\quad \underline{X \vdash B} & & & \quad \underline{X \vdash C} & & (\perp\ c), (IV) \\
 & \underline{X, X \vdash B\wedge C} & & & & (\wedge\ E) \\
 & X \vdash B\wedge C & & & & (KÜ)
\end{array}
$$

$A = B \to C$:
eine Herleitung:

$$
\begin{array}{ll}
\quad H & \\
\quad \ldots & \\
\underline{X, \neg(B\to C) \vdash \perp} & \\
X \vdash B\to C & (\perp\ c)
\end{array}
$$

transformiert sich in:

$$
\begin{array}{lll}
\quad H & H_1 & \\
\underline{X, \neg(B\to C) \vdash \perp} & \ldots & \\
\underline{X \vdash \neg(B\to C)\to\perp} & \underline{B, \neg C \vdash \neg(B\to C)} & \\
\quad \underline{X, B, \neg C \vdash \perp} & & \\
\quad \underline{X, B \vdash C} & & (\perp\ c), (IV) \\
\quad X \vdash B\to C & & (\to E)
\end{array}
$$

DEFINITION (Haupt- und Nebenprämisse):

Beseitigungsregel	Hauptprämisse ist	Nebenprämisse ist
($\wedge$ B1), ($\wedge$ B2)	$A\wedge B$	
($\to$ B)	$A\to B$	A (in der zweiten Sequenz über dem Strich)

DEFINITION (Maximumformel):
Eine Formel A, die in einer Herleitung von N5 sowohl unter dem Strich einer Einführungsregel - entweder ($\wedge$ E), ($\to$ E) oder ($\perp$ c) - entsteht, als auch Hauptprämisse einer Beseitigungsregel ist, heißt Maximumformel.

DEFINITION (normale Herleitung in N5):
Eine Herleitung H in N5 ist in normal gdw sie keine Maximumformel enthält.

SATZ 1 (Normalisierungssatz):
Zu jeder Herleitung H von $X \vdash A$ in N5 gibt es eine normale Herleitung H* in N5 von $X \vdash A$.

BEWEISSKIZZE:
Nach Lemma 10 kann man sich auf Herleitungen mit der dort angegebenen Eigenschaft beschränken; mit sog. Reduktionsschritten zeigt man nun, daß sich jede Maximumformel eliminieren lässt:

$\wedge$-Reduktionsschritt:
eine Herleitung:

$$\dfrac{\dfrac{X \vdash A \qquad Y \vdash B}{X, Y \vdash A\wedge B}\ (\wedge\ E)}{X, Y \vdash A}\ (\wedge\ B)$$

transformiert sich in:

$$\dfrac{X \vdash A}{X, Y \vdash A}\ (AB)$$

$\to$-Reduktionsschritt:
eine Herleitung:

$$\dfrac{X \vdash A \qquad \dfrac{Y, A \vdash B}{Y \vdash A\to B}\ (\to E)}{X, Y \vdash B}\ (\to B)$$

transformiert sich in:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A, Y \vdash B \qquad \neg B \vdash \neg B\ \ (Ax^*)}{\neg B, A, Y \vdash \bot}\ (\neg\ B)}{\neg B, Y \vdash \neg A}\ (\neg\ E) \qquad X \vdash A}{\neg B, X, Y \vdash \bot}\ (\neg\ B)}{X, Y \vdash B}\ (\bot\ c)$$

FOLGERUNG (Satz über die Teilformeleigenschaft)
Ist H eine normale Herleitung der Sequenz $X \vdash A$ in N5, so sind alle in H vorkommenden Formeln Teilformeln der Menge $\{\bot\}\cup Sf\{\neg A\}\cup Sf\neg X$.

5.1.10 Die Variante $\mathcal{N}_{\mathbf{MM}}$

Diese Multimengen-Supervariante enthält als Axiome alle Sequenzen der Gestalt A $\vdash$ A;
als Regeln enthält sie alle Regeln aus 5.1.1 bis auf die Vertauschungsregeln.

LEMMA 12:
$\mathcal{N}_{\mathbf{MM}}$ ist adäquat.

BEWEIS:
Klar

BEMERKUNG:
In späteren Abschnitten werden noch andere Regeln betrachtet, sodaß nicht wirklich von einer Supervariante gesprochen werden kann; diese anderen Regeln lassen sich jedoch nicht immer leicht als Einführungs- oder Beseitigungsregeln klassifizieren.

5.1.11 Die Varianten N6, N6a und $\mathcal{N}_M$

In der Mengenformulierung sind bereits die Kürzungsregeln implizit enthalten.
Der Einfachheit halber betrachten wir nur mehr diejenigen Varianten, die die Abschwächungsregeln explizit enthalten, u.z. N6, N6a und $\mathcal{N}_M$ (Beschreibung weiter unten).
Die Mengen-Supervariante $\mathcal{N}_M$ enthält als Axiome alle Sequenzen der Gestalt $A \vdash A$;
als Regeln enthält sie alle Regeln aus 5.1.1 bis auf die Vertauschungs- und Kürzungsregeln.

LEMMA 13:
Die Varianten N6, N6a und $\mathcal{N}_M$ sind adäquat.

BEWEIS:
Es gelten folgende Entsprechungen zwischen Mengen- und adäquaten Multimengenvarianten:
N6 entspricht N2,
N6a entspricht N6a,
$\mathcal{N}_M$ entspricht $\mathcal{N}_{MM}$

Variante N6:

Ist X eine endliche Menge von Formeln und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome: $A \vdash A$

Regeln:

logische Einführungsregeln

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash B}{X, Y \vdash A \wedge B} \qquad (\wedge\ E)$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B} \qquad (\vee\ E1)$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A \vee B} \qquad (\vee\ E2)$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \rightarrow B} \qquad (\rightarrow E)$$

$$\frac{X, A \vdash \bot}{X \vdash \neg A} \qquad (\neg\ E)$$

logische Beseitigungsregeln

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash A} \qquad (\wedge\ B1)$$

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash B} \qquad (\wedge\ B2)$$

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad Y, A \vdash C \qquad Z, B \vdash C}{X, Y, Z, \vdash C} \qquad (\vee\ B)$$

$$\frac{X \vdash A \rightarrow B \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \qquad (\rightarrow B)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash \neg A}{X, Y \vdash \bot} \qquad (\neg\ B)$$

Klassische Widerspruchsregel:

$$\frac{X, \neg A \vdash \bot}{X \vdash A} \qquad (\bot\ c)$$

Strukturelle Regel:

$$\frac{X \vdash B}{X, A \vdash B} \qquad (AB)$$

Variante N6a:

Ist X eine endliche Menge von Formeln und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome: $A \vdash A$

Regeln:

logische Einführungsregeln

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash B}{X \vdash A \wedge B} \quad (\wedge\ \text{Ea})$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ \text{E1})$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ \text{E2})$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \rightarrow B} \quad (\rightarrow \text{E})$$

$$\frac{X, A \vdash \bot}{X \vdash \neg A} \quad (\neg\ \text{E})$$

logische Beseitigungsregeln

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash A} \quad (\wedge\ \text{B1})$$

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash B} \quad (\wedge\ \text{B2})$$

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad X, A \vdash C \qquad X, B \vdash C}{X \vdash C} \quad (\vee\ \text{Ba})$$

$$\frac{X \vdash A \rightarrow B \qquad X \vdash A}{X \vdash B} \quad (\rightarrow \text{Ba})$$

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash \neg A}{X \vdash \bot} \quad (\neg\ \text{Ba})$$

Klassische Widerspruchsregel:

$$\frac{X, \neg A \vdash \bot}{X \vdash A} \quad (\bot\ \text{c})$$

Strukturelle Regel:

$$\frac{X \vdash B}{X, A \vdash B} \quad (\text{AB})$$

BEMERKUNG:

N6a entspricht dem Kalkül von Sundholm (1983) (formuliert in der Signatur $\{\neg, \wedge, \vee, \rightarrow\}$, statt $\bot$ steht die leere Menge $\emptyset$), mit dem Axiom $X, A \vdash A$ und folgender Abschwächungsregel:

$$\frac{X \vdash A}{X, Y \vdash A}$$

5.1.12 Die Varianten N7 und N7a

Variante N7:

Ist X eine (nicht notwendigerweise endliche) Menge, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome: $X \vdash A$, wobei $A \in X$ (Triv)

Regeln:

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash B}{X \vdash A\wedge B} \quad (\wedge\ Ea)$$

$$\frac{X \vdash A\wedge B}{X \vdash A} \quad (\wedge\ B1)$$

$$\frac{X \vdash A\wedge B}{X \vdash B} \quad (\wedge\ B2)$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A\vee B} \quad (\vee\ E1)$$

$$\frac{X, A \vdash C \qquad X, B \vdash C}{X, A\vee B \vdash C} \quad (\vee\ Rau)$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A\vee B} \quad (\vee\ E2)$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A\rightarrow B} \quad (\rightarrow E)$$

$$\frac{X \vdash A\rightarrow B \qquad X \vdash A}{X \vdash B} \quad (\rightarrow Ba)$$

Klassische Widerspruchsregel:

$$\frac{X, \neg A \vdash B \qquad X, \neg A \vdash \neg B}{X \vdash A} \quad (\neg\ k)$$

BEMERKUNG:
Dieser Kalkül entspricht dem Kalkül von Rautenberg 1979. Rautenberg spricht hier von Sequenzenkalkül und nennt das, was wir als Sequenzenkalkül bezeichnen, Bisequenzenkalkül; im folgenden unterscheiden wir in der Bezeichnungsweise bei zweiprämissigen Regeln nicht mehr zwischen Regeln mit gleichem Kontext und solchen mit verschiedenem Kontext.

LEMMA 14:
Die intuitionistische Variante N7i erhält man, indem man $(\neg\ k)$ durch die beiden folgenden Regeln ersetzt:

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash \neg A}{X \vdash B} \quad (\neg\ i)$$

$$\frac{X, A \vdash B \qquad X, A \vdash \neg B}{X \vdash \neg A} \quad (\neg\ j)$$

BEWEIS:
Wir zeigen, daß N2i und N7i äquivalent sind:
($\vee$ Rau) ist zulässig in N2i:

$\underline{A\vee B \vdash A\vee B \qquad X, A \vdash C \qquad X, B \vdash C}$
$\underline{X, X, A\vee B \vdash C}$ $\qquad (\vee\ B)$
$X, A\vee B \vdash C$ $\qquad$ (KÜ)

($\neg$ i) ist zulässig in N2i:

$\underline{X \vdash A \qquad X \vdash \neg A}$
$\underline{X, X \vdash \bot}$ $\qquad (\neg\ B)$
$\underline{X \vdash \bot}$ $\qquad$ (KÜ)
$X \vdash B$ $\qquad (\bot\ i)$

($\neg$ j) ist zulässig in N2i:

$\underline{X, A \vdash B \qquad X, A \vdash \neg B}$
$\underline{X, X, A, A \vdash \bot}$ $\qquad (\neg\ B)$
$\underline{X, A \vdash \bot}$ $\qquad$ (KÜ)
$X \vdash \neg A$ $\qquad (\neg\ E)$

($\vee$ B) ist zulässig in N7i (die Abschwächungsregeln sind ebenfalls zulässig in N7i):

$\qquad\qquad \underline{Y, A \vdash C \qquad\qquad Z, B \vdash C}$
$\qquad\qquad \underline{X, Y, Z, A \vdash C \qquad X, Y, Z, B \vdash C}$ $\qquad$ (AB)
$\underline{X \vdash A\vee B \qquad X, Y, Z, A\vee B \vdash C}$ $\qquad (\vee$ Rau)
$\underline{X, Y, Z \vdash A\vee B \qquad X, Y, Z \vdash A\vee B\to C}$ $\qquad$ (AB), $(\to E)$
$X, Y, Z, \vdash C$ $\qquad (\to B)$

($\neg$ E) ist zulässig in N7i; da N7i in der Signatur $\{\neg, \wedge, \vee, \to\}$ formuliert ist, zeigen wir die Zulässigkeit folgender Regel:

$\underline{X, A \vdash B\wedge\neg B}$
$X \vdash \neg A$ $\qquad (\neg\ E')$

$\underline{X, A \vdash B\wedge\neg B} \qquad \underline{X, A \vdash B\wedge\neg B}$
$\underline{X, A \vdash B \qquad\qquad X, A \vdash \neg B}$ $\qquad (\wedge\ B1), (\wedge\ B2)$
$X \vdash \neg A$ $\qquad (\neg\ j)$

($\neg$ B) ist zulässig in N7i; wir zeigen die Zulässigkeit folgender Regel:

$\underline{X \vdash A \qquad Y \vdash \neg A}$
$X, Y \vdash B\wedge\neg B$ $\qquad (\neg\ B')$

$\underline{X \vdash A \qquad Y \vdash \neg A}$
$\underline{X, Y \vdash A \qquad X, Y \vdash \neg A}$ $\qquad$ (AB)
$X, Y \vdash B\wedge\neg B$ $\qquad (\neg\ i)$

($\bot$ i) ist zulässig in N7i; wir zeigen die Zulässigkeit folgender Regel:

$\underline{X \vdash B\wedge\neg B}$
$X \vdash A$ $\qquad (\bot\ i')$

$\underline{X \vdash B\wedge\neg B} \qquad \underline{X \vdash B\wedge\neg B}$
$\underline{X \vdash B \qquad\qquad X \vdash \neg B}$ $\qquad (\wedge\ B1), (\wedge\ B2)$
$X \vdash A$ $\qquad (\neg\ i)$

LEMMA 15:
N7 ist adäquat.

BEWEIS:
Wir zeigen, daß N2 und N7 äquivalent sind:
($\neg$ k) ist zulässig in N2:

$\underline{X, \neg A \vdash B \qquad\qquad X, \neg A \vdash \neg B}$

$\underline{X, X, \neg A, \neg A \vdash \bot}$ ($\neg$ B)

$\underline{X, \neg A \vdash \bot}$ (KÜ B)

$X \vdash A$ ($\bot$ k)

($\neg$ E‘) ist zulässig in N7:

$\underline{X, A \vdash B\wedge\neg B} \qquad\qquad \underline{\neg\neg A, \neg A \vdash \neg A \qquad \neg\neg A, \neg A \vdash \neg\neg A}$

$\underline{X \vdash A\to B\wedge\neg B \qquad\qquad \neg\neg A, \neg A \vdash A}$ ($\to$ E), ($\neg$ k)

$\underline{X, \neg\neg A \vdash B\wedge\neg B}$ ($\to$ B)

$\underline{X, \neg\neg A \vdash B \qquad\qquad X, \neg\neg A \vdash \neg B}$ ($\wedge$ B1), analog

$X \vdash \neg A$ ($\neg$ k)

($\neg$ B‘) ist zulässig in N7 (die Abschwächungsregeln sind zulässig in N7):

$\underline{X \vdash A} \qquad\qquad \underline{X \vdash \neg A}$

$\underline{X, \neg(B\wedge\neg B) \vdash A \qquad\qquad X, \neg(B\wedge\neg B) \vdash \neg A}$ (AB)

$X \vdash B\wedge\neg B$ ($\neg$ k)

($\bot$ c‘) ist zulässig in N7, wobei ($\bot$ c‘) folgende Regel ist:

$\underline{X, \neg A \vdash B\wedge\neg B}$

$X \vdash A$ ($\bot$ c‘)

$\underline{X, \neg A \vdash B\wedge\neg B} \qquad\qquad \underline{X, \neg A \vdash B\wedge\neg B}$

$\underline{X, \neg A \vdash B \qquad\qquad X, \neg A \vdash \neg B}$ ($\wedge$B1), ($\wedge$ B2)

$X \vdash A$ ($\neg$ k)

Variante N7a:

Ist X eine (nicht notwendigerweise endliche) Menge, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome: $A \vdash A$ (Ax*)

Regeln:

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash B}{X \vdash A \wedge B} \quad (\wedge\ \mathrm{Ea})$$

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash A} \quad (\wedge\ \mathrm{B1})$$

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash B} \quad (\wedge\ \mathrm{B2})$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ \mathrm{E1})$$

$$\frac{X, A \vdash C \qquad X, B \vdash C}{X, A \vee B \vdash C} \quad (\vee\ \mathrm{Rau})$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ \mathrm{E2})$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \to B} \quad (\to \mathrm{E})$$

$$\frac{X \vdash A \to B \qquad X \vdash A}{X \vdash B} \quad (\to \mathrm{Ba})$$

Widerspruchs- bzw. Negationsregeln:

$$\frac{X \vdash A \qquad X \vdash \neg A}{X \vdash B} \quad (\neg\ \mathrm{i})$$

$$\frac{X, A \vdash B \qquad X, \neg A \vdash B}{X \vdash B} \quad (\neg\ 2)$$

Strukturelle Regel:

$$\frac{X \vdash B}{X, A \vdash B} \quad (\mathrm{AB})$$

BEMERKUNG:
Dieser Kalkül entspricht dem Kalkül von Rautenberg 1996; ($\neg$ 2) heißt auch Beweis durch Fallunterscheidung.

LEMMA 16:
N7a ist adäquat.

BEWEIS:
Wir zeigen, daß N2 und N7a äquivalent sind:
($\neg$ 2) ist zulässig in N2:

$$\begin{array}{ll}
\underline{\vdash A\vee\neg A \qquad X, A \vdash B \qquad X, \neg A \vdash B} & \text{B3} \\
\underline{X, X \vdash B} & (\vee\ \text{B}) \\
X \vdash B & (\text{KÜ})
\end{array}$$

($\neg$ E‘) ist zulässig in N7a:

$$\begin{array}{ll}
\underline{X, A \vdash B\wedge\neg B} \qquad \underline{X, A \vdash B\wedge\neg B} & \\
\underline{X, A \vdash B \qquad\qquad X, A \vdash \neg B} & (\wedge\ \text{B1}), (\wedge\ \text{B2}) \\
\underline{X, A \vdash \neg A \qquad\qquad X, \neg A \vdash \neg A} & (\neg\ \text{i}), (\text{Ax*}), (\text{AB}) \\
X \vdash \neg A & (\neg\ 2)
\end{array}$$

($\neg$ B‘) ist zulässig in N7a: analog zu N7i;
($\perp$ c‘) ist zulässig in N7a:

$$\begin{array}{ll}
\underline{X, \neg A \vdash B\wedge\neg B} \qquad \underline{X, \neg A \vdash B\wedge\neg B} & \\
\underline{X, \neg A \vdash B \qquad\qquad X, \neg A \vdash \neg B} & (\wedge\ \text{B1}), (\wedge\ \text{B2}) \\
\underline{X, \neg A \vdash A \qquad\qquad X, A \vdash A} & (\neg\ \text{i}), (\text{Ax*}), (\text{AB}) \\
X \vdash A & (\neg\ 2)
\end{array}$$

BEMERKUNG (zur Semantik von Kalkülen des Natürlichen Schliessens):
Man kann für Kalküle des Natürlichen Schliessens auch einen semantischen Adäquatheitsbeweis völlig analog zu dem Beweis für die schwache Korrektheit und Vollständigkeit von $\vdash_{HF}$ aus Kapitel 2 führen; so zeigt man etwa für N7a zuerst den Endlichkeitssatz (darum wurde bei N7 und N7a die Beschränkung auf endliche Mengen weggelassen); für weitere Details siehe etwa Rautenberg (1996, 18ff).

5.1.13 Die Varianten N8 und N8a

Variante N8:

Ist X eine endliche Menge und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome:

$A \vdash A$	(Ax*)
$A, A \to B \vdash B$	(Modus Ponens)
$A, B \vdash A \wedge B$	Konjunktion
$A \wedge B \vdash A$	Simplifikation
$A \wedge B \vdash B$	Simplifikation
$A \to C, B \to C \vdash (A \vee B) \to C$	
$A \vdash A \vee B$	Addition
$A \vdash B \vee A$	Addition
$A \vdash \neg\neg A$	Doppelte Negation
$A, \neg A \vdash B$	Ex falso quodlibet

Regeln:

$$\frac{X \vdash A \qquad A, Y \vdash B}{X, Y \vdash B} \quad \text{(CUT*)}$$

$$\frac{X \vdash B}{A, X \vdash B} \quad \text{(AB)}$$

$$\frac{\neg A, X \vdash B \wedge \neg B}{X \vdash A} \quad (\perp c')$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \to B} \quad (\to E)$$

$$\frac{A, X \vdash B \qquad \neg A, X \vdash B}{X \vdash B} \quad (\neg\ 2)$$

BEMERKUNG:
Dieser Kalkül entspricht dem Kalkül G aus Czermak: Logik. Vorlesungsskriptum (dort allerdings mit Folgen anstatt Mengen); dieser Kalkül enthält erstmals auch nichttriviale Axiome; übersetzt man diese in Regeln, erhält man folgende Variante N8a:

Variante N8a:

Ist X eine endliche Menge und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome: $A \vdash A$ (Ax*)

Regeln:

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash B}{X, Y \vdash A\wedge B} \quad (\wedge\ E)$$

$$\frac{X \vdash A\wedge B}{X \vdash A} \quad (\wedge\ B1)$$

$$\frac{X \vdash A\wedge B}{X \vdash B} \quad (\wedge\ B2)$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A\vee B} \quad (\vee\ E1)$$

$$\frac{X \vdash A\to C \qquad Y \vdash B\to C}{X, Y \vdash (A\vee B)\to C} \quad (\vee\ Cz)$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A\vee B} \quad (\vee\ E2)$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A\to B} \quad (\to E)$$

$$\frac{X \vdash A\to B \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \quad (\to B)$$

Widerspruchs- bzw. Negationsregeln:

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash \neg\neg A} \quad (\neg\neg\ E)$$

$$\frac{X, \neg A \vdash B\wedge\neg B}{X \vdash A} \quad (\perp\ c‘)$$

$$\frac{X, A \vdash B \qquad X, \neg A \vdash B}{X \vdash B} \quad (\neg\ 2)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash \neg A}{X, Y \vdash B} \quad (\neg\ i)$$

Strukturschlussregeln:

$$\frac{X \vdash A \qquad A, Y \vdash B}{X, Y \vdash B} \quad (CUT^*)$$

$$\frac{X \vdash B}{A, X \vdash B} \quad (AB)$$

BEMERKUNG:
Ein Axiom (A) der Gestalt $A_1, A_2, ..., A_n \vdash B$ wurde dabei in folgende Regel (RA) übersetzt:

$$\frac{X_1 \vdash A_1 \qquad X_2 \vdash A_2 \qquad \ldots \qquad X_n \vdash A_n}{X_1, X_2, ..., X_n \vdash B} \qquad \text{(RA)}$$

LEMMA 17:
N8 und N8a sind beide äquivalent zu N2.

BEWEIS:
Da sowohl ($\rightarrow$ E) als auch ($\rightarrow$ B) zu den Regeln von N8 und N8a gehören, sind N8 und N8a äquivalent; wir zeigen nun, daß N2 und N8a äquivalent sind:
($\vee$ Cz) ist zulässig in N2: ÜBUNG;
($\neg\neg$ E) ist zulässig in N2: ÜBUNG;
(CUT*) ist zulässig in N2: ÜBUNG;
($\vee$ B) ist zulässig in N8a: ÜBUNG;
($\neg$ E‘) ist zulässig in N8a: analog zu N7 bzw. N7a;
($\neg$ B‘)ist zulässig in N8a: analog zu N7 bzw. N7a.

BEMERKUNG:
Genauso wie alle bisher betrachteten Supervarianten enthält N8a einige redundante Regeln; das Augenmerk liegt hier (wie bei einigen weiteren Varianten) nicht auf Ökonomie, sondern auf dem Auffinden von Beweisen, das durch das Vorhandensein zusätzlicher Regeln erleichtert wird.

5.1.14 Die Varianten N9, N9a, N9b und N9c

Variante N9:

Ist X eine endliche Menge und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome:

$A \vdash A$	(Ax*)
$A, A\to B \vdash B$	Modus Ponens
$\neg B, A\to B \vdash \neg A$	Modus Tollens
$A\wedge B \vdash A$	Simplifikation
$A\wedge B \vdash B$	Simplifikation
$A, B \vdash A\wedge B$	Konjunktion
$A\vee B, \neg A \vdash B$	Disjunktiver Syllogismus
$A\vee B, \neg B \vdash A$	Disjunktiver Syllogismus
$A \vdash A\vee B$	Addition
$A \vdash B\vee A$	Addition
$A \vdash \neg\neg A$	Doppelte Negation
$\neg\neg A \vdash A$	Doppelte Negation

Regeln:

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A\to B} \qquad (\to E)$$

$$\frac{X, A \vdash B \qquad X, \neg A \vdash B}{X \vdash B} \qquad (\neg\ 2)$$

$$\frac{X, \neg A \vdash B\wedge\neg B}{X \vdash A} \qquad (\bot\ c')$$

$$\frac{X \vdash B}{A, X \vdash B} \qquad (AB)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad A, Y \vdash B}{X, Y \vdash B} \qquad (CUT^*)$$

BEMERKUNG:
Der Kalkül N9 entspricht dem Kalkül aus Schurz (1995).
Übersetzt man die nichttrivialen Axiome von N9 in Regeln, erhält man folgende Variante N9a:

Variante N9a:

Ist X eine endliche Menge und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiom: $A \vdash A$ (Ax*)

Regeln:

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash B}{X, Y \vdash A \wedge B} \quad (\wedge\ E)$$

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash A} \quad (\wedge\ B1)$$

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash B} \quad (\wedge\ B2)$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ E1)$$

$$\frac{X \vdash B}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ E2)$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \rightarrow B} \quad (\rightarrow E)$$

$$\frac{X \vdash A \rightarrow B \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \quad (\rightarrow B)$$

$$\frac{X \vdash A \rightarrow B \qquad Y \vdash \neg B}{X, Y \vdash \neg A} \quad (MT)$$

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad Y \vdash \neg A}{X, Y \vdash B} \quad (DS)$$

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad Y \vdash \neg B}{X, Y \vdash A} \quad (DS)$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash \neg\neg A} \quad (\neg\neg\ E)$$

$$\frac{X \vdash \neg\neg A}{X \vdash A} \quad (\neg\neg\ B)$$

$$\frac{X, \neg A \vdash B \wedge \neg B}{X \vdash A} \quad (\perp c')$$

$$\frac{X, A \vdash B \qquad X, \neg A \vdash B}{X \vdash B} \quad (\neg\ 2)$$

$$\frac{X \vdash B}{A, X \vdash B} \quad (AB)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad A, Y \vdash B}{X, Y \vdash B} \quad (CUT^*)$$

Weitere mögliche Varianten sind:
Da N9a einige redundante Regeln enthält, kann man u.a. eine weitere Variante N9b aus N9a erhalten durch Weglassen von (MT) und Ersetzen von ($\perp$ c‘) durch ($\neg$ i);
N9c entsteht aus N9b durch Ersetzen von ($\lor$ E1) und ($\lor$ E2) durch den disjunktiven Modus Ponens $A, A\lor B \to C \vdash C$, formuliert als Regel:

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash A\lor B \to C}{X, Y \vdash C} \qquad \text{(DMP)}$$

bzw. $B, A\lor B \to C \vdash C$, formuliert als Regel:

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash A\lor B \to C}{X, Y \vdash C} \qquad \text{(DMP)}$$

und durch Ersetzen von ($\land$ E) durch den konjunktiven Modus Ponens $A, B, A\land B \to C \vdash C$, formuliert als Regel:

$$\frac{X \vdash A \qquad Y, \vdash B \qquad Z \vdash A\land B \to C}{X, Y, Z \vdash C} \qquad \text{(KMP)}$$

Einführungsregeln werden hier ersetzt durch Eliminationsregeln; aber die Frage ist natürlich, wie genau definiert man Einführungsregeln bzw. Eliminationsregeln; vgl. auch Abschnitt 5.1.17.

LEMMA 18:
N9, N9a, N9b und N9c sind adäquat.

BEWEIS:
N9 und N9a sind klarerweise äquivalent;
N9a und N9b sind ebenfalls äquivalent, und beide sind äquivalent zu N2 (vergleiche N7 bzw. N7a);
so ist etwa ($\lor$ Rau) zulässig in N9b:

$$\begin{array}{llll}
\underline{X, A \vdash C} & & & \\
\underline{X \vdash A \to C \quad A\lor B, \neg B \vdash A} & & \underline{X, B \vdash C} & \text{(DS)} \\
\underline{X, A\lor B, \neg B \vdash C \qquad\qquad\qquad} & & \underline{X, A\lor B, B \vdash C} & (\to \text{B}), \text{(AB)} \\
\qquad X, A\lor B \vdash C & & & (\neg\ 2)
\end{array}$$

N9b und N9c sind ebenfalls äquivalent:
so ist etwa $A \vdash A\lor B$ herleitbar in N9c:

$$\begin{array}{lll}
& \underline{A\lor B \vdash A\lor B} & \text{(Ax*)} \\
\underline{A \vdash A \qquad\quad} & \underline{\vdash A\lor B \to A\lor B} & \text{(Ax*)}, (\to \text{E}) \\
\qquad A \vdash A\lor B & & \text{(DMP)}
\end{array}$$

5.1.15 Die Variante N10

Wie schon im ersten Abschnitt erwähnt, gibt es viele verschiedene Versionen der Präsentation des Natürlichen Schliessens. Gentzen (1934) und Prawitz (1965) etwa verwenden ‚Regeln zur Konstruktion von Beweisbäumen‘; in diesem Skriptum folgen wir Troelstra / Schwichtenberg (1996) und fassen den Kalkül in Sequenzenform - also die ‚Regeln zur Herleitung von Sequenzen der Gestalt $X \vdash A$‘ - als Metakalkül für alle Versionen des Natürlichen Schliessens auf.

Ein Vorteil des Kalküls in Sequenzenform (unter Annahme der CDC) ist, daß die Regeln ($\rightarrow$ E), ($\neg$ E) und ($\perp$ c) leichter zu formulieren sind, da man das Schliessen von Annahmenklassen einfach dadurch ausdrückt, daß die entsprechenden Formeln links vom Sequenzenzeichen verschwinden und entsprechende andere Formeln rechts vom Sequenzenzeichen eingeführt werden. Erhalten bleibt dabei stets die Beziehung zwischen einer Formel A und den Annahmen X, von denen sie abhängt, ausgedrückt in der Sequenz $X \vdash A$.

Will man die ursprüngliche Idee des Schliessens von Formeln unter bestimmten Annahmen auf andere Formeln unter bestimmten Annahmen beibehalten, hat man neben den Regeln zur Konstruktion von Beweisbäumen noch andere Alternativen. Schurz schlägt in diesem Zusammenhang folgende Terminologie vor und folgt dabei teilweise Rautenberg (1979):

```
                  Kalküle des Natürlichen Schliessens
                  /                                   \
Satzkalküle                                           Sequenzenkalküle
                                                      /                         \
                                  Monosequenzenkalküle        Bisequenzenkalküle
```

Unter Satzkalkülen versteht Schurz dabei Kalküle, die das Schliessen von Formeln auf neue Formeln mithilfe von Regeln und Metaregeln modellieren; der von Schurz (1995) verwendete Satzkalkül *S* übersetzt sich in den Monosequenzenkalkül N9 wie folgt: aus den Regeln von *S* werden die Axiome von N9, und aus den Metaregeln von *S* werden die Regeln von N9.

Satzkalküle unterscheiden sich in der Art der Präsentation, u.z. vor allem dadurch, wie man die oben erwähnten kritischen Regeln ($\rightarrow$ E), ($\neg$ E) und ($\perp$ c) und das damit verbundene Schliessen von Annahmenklassen am besten graphisch darstellt. Aus der Fülle der (v.a. philosophischen) Literatur seien nun vier Beispiele anhand der Regel ($\rightarrow$ E) kurz vorgestellt; dabei kann die Anwendung dieser Regel als Teilbeweis innerhalb einer Herleitung aufgefasst werden; in allen Fällen jedoch schliesst man von Formeln unter bestimmten Annahmen auf andere Formeln unter bestimmten anderen Annahmen, sodaß unser Kalkül in Sequenzenform als Metakalkül für alle diese Versionen aufgefasst werden kann.

Die Regel (→ E) wird dargestellt durch:
(i) das Schreiben des Teilbeweises in einem Kästchen; u.a. von Jaskowski (1934), Fitting (1990):

$$\boxed{\begin{array}{l} A \\ \ldots \\ B \end{array}}$$

$$A \to B$$

(ii) das Ziehen von Annahmenbereichsklammern; u.a. von Copi (1973), Klenk (1989), Schurz (1995):

n	A
...	...
m	B
m+1	A→B

(iii) das Ziehen von senkrechten Strichen, u.a. von Fitch (1952):

$$\begin{array}{l|l} & \underline{A} \\ & \ldots \\ & B \\ A \to B & \end{array}$$

(iv) explizite Annahmenkennzeichnung durch Nummern; u.a. von Mates (1978) und Essler / Martinez (1991).

Stellvertretend wollen wir nun die Version *N* von Essler / Martinez (1991) betrachten; eine Herleitung in *N* besteht aus einer (nichtleeren) endlichen Folge von Zeilen, wobei eine einzelne Zeile folgende Form hat:

$n(n_1, ..., n_k)$ A Regel (k, l)

dabei bezeichne:

n	Zeilennummer
$n_1, ..., n_k$	Nummern der Zeilen, von denen die Formel A abhängt
A	Formel in der Zeile (mit der Nummer n)
Regel (k, l)	Name der Regel, mit deren Hilfe A erschlossen wird (k und l bezeichnen die Nummern der Zeilen, die Prämissen der Regel sind im Falle einer zweiprämissigen Regel, sonst nur k bei einer einprämissigen Regel, oder leer bei Annahmeeinführung).

Konvention: A_n bezeichne die Formel in der Zeile mit der Nummer n.

Die der Zeile mit der Nummer n:

$n(n_1, ..., n_k)$ A Regel (k, l)

entsprechende Sequenz sei die Sequenz $An_1, ..., An_k \vdash A$.

Der Annahmeeinführung:

n(n) A AE

entspricht das Axiom $A \vdash A$ im Sequenzenkalkül.

Der Regel:

k(k)	A	
$l(l_1, ..., l_r, k)$	B	
$n(l_1, ..., l_r)$	$A \to B$	$\to E_{k,l}$ ($l \geq k$, $n > k, l$)

entspricht die Regel:

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \to B} \qquad (\to E)$$

im Sequenzenkalkül, wobei $X = \{Al_1, ..., Al_r\}$.

Der Regel:

$k(k_1, ..., k_r)$	$A \to B$	
$l(l_1, ..., l_s)$	A	
$n(k_1, ..., l_s)$	B	$\to B_{k,l}$ ($n > k, l$)

entspricht die Regel:

$$\frac{X \vdash A \to B \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \qquad (\to B)$$

im Sequenzenkalkül, wobei $X = \{Ak_1, ..., Ak_r\}$ und $Y = \{Al_1, ..., Al_s\}$.
Analog für die anderen Regeln. Man erhält so insgesamt ein System von folgenden (Axiomen und) Regeln:

Variante N10:

Ist X eine endliche Menge und A eine Formel, so ist $X \vdash A$ eine Sequenz

Axiome: $A \vdash A$ (Ax*)

Regeln:

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash B}{X, Y \vdash A \wedge B} \quad (\wedge\ \mathrm{E})$$

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash A} \quad (\wedge\ \mathrm{B1})$$

$$\frac{X \vdash A \wedge B}{X \vdash B} \quad (\wedge\ \mathrm{B2})$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A \vee B} \quad (\vee\ \mathrm{E1})$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash B \vee A} \quad (\vee\ \mathrm{E2})$$

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad Y \vdash \neg A}{X, Y \vdash B} \quad (\mathrm{DS})$$

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A \rightarrow B} \quad (\rightarrow\ \mathrm{E})$$

$$\frac{X \vdash A \rightarrow B \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \quad (\rightarrow\ \mathrm{B})$$

$$\frac{X \vdash A \rightarrow B \wedge \neg B}{X \vdash \neg A} \quad (\neg\ \mathrm{E}'')$$

$$\frac{X \vdash \neg\neg A}{X \vdash A} \quad (\neg\neg\ \mathrm{B})$$

LEMMA 19:
N10 ist adäquat

BEWEIS:
ÜBUNG.

BEISPIEL:
Eine Herleitung von $A \rightarrow B$, $C \rightarrow B \vdash A \vee C \rightarrow B$, zuerst in *S* mit expliziter Annahmen-kennzeichnung, dann in N9a:

Herleitung in *S*:

1(1)	$A \rightarrow B$	Annahmeeinführung AE
2(2)	$C \rightarrow B$	AE
3(3)	$A \vee C$	AE
4(4)	A	AE
5(1,4)	B	MP (1,4)
6(6)	$\neg A$	AE
7(3,6)	C	DS (3,6)
8(2,3,6)	B	MP (2,7)
9 (1,2,3)	B	FU (4,5,6,8)
10(1,2)	$A \vee C \rightarrow B$	KB (3,9)

Übersetzung dieser Herleitung ergibt eine Herleitung in N9:

1	$A \rightarrow B \vdash A \rightarrow B$	Axiom
2	$C \rightarrow B \vdash C \rightarrow B$	Axiom
3	$A \vee C \vdash A \vee C$	Axiom
4	$A \vdash A$	Axiom
5	$A, A \rightarrow B \vdash B$	$\rightarrow$Beseitigung (1,4)
6	$\neg A \vdash \neg A$	Axiom
7	$A \vee C, \neg A \vdash C$	DS (3,6)
8	$C \rightarrow B, A \vee C, \neg A \vdash B$	$\rightarrow$Beseitigung (2,7)
9	$C \rightarrow B, A \rightarrow B, A \vee C \vdash B$	FU (5,8)
10	$A \rightarrow B, C \rightarrow B \vdash A \vee C \rightarrow B$	$\rightarrow$Einführung (9)

5.1.16 Die Varianten N11 und N11a

In den letzten beiden Abschnitten werden einige Varianten vorgestellt, die in der Kognitionswissenschaft von Bedeutung sind, da sie das Schliessen im Alltag zu modellieren versuchen.

Variante N11:

Axiome: $A \vdash A$ (Ax*)

Forward-Regeln von N11 (vereinfacht):

$$\frac{X \vdash A\to B \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \quad (\to B)$$

$$\frac{X \vdash A\wedge B}{X \vdash A} \quad (\wedge B1) \qquad\qquad \frac{X \vdash A\wedge B}{X \vdash B} \quad (\wedge B2)$$

$$\frac{X \vdash \neg\neg A}{X \vdash A} \quad (\neg\neg B)$$

$$\frac{X \vdash A\vee B \qquad Y \vdash \neg A}{X, Y \vdash B} \quad (DS) \qquad\qquad \frac{X \vdash A\vee B \qquad Y \vdash \neg B}{X, Y \vdash A} \quad (DS)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash A\vee B\to C}{X, Y \vdash C} \quad (DMP) \qquad\qquad \frac{X \vdash B \qquad Y \vdash A\vee B\to C}{X, Y \vdash C} \quad (DMP)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash B \qquad Z \vdash A\wedge B\to C}{X, Y, Z \vdash C} \quad (KMP)$$

$$\frac{X \vdash \neg(A\wedge B)}{X \vdash \neg A\vee\neg B} \quad (DM)$$

$$\frac{X \vdash \neg(A\vee B)}{X \vdash \neg A} \quad (DM) \qquad\qquad \frac{X \vdash \neg(A\vee B)}{X \vdash \neg B} \quad (DM)$$

$$\frac{X \vdash \neg(A\wedge B) \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash \neg B} \quad (DS‘) \qquad\qquad \frac{X \vdash \neg(A\wedge B) \qquad Y \vdash B}{X, Y \vdash \neg A} \quad (DS‘)$$

$$\frac{X \vdash A\vee B \qquad Y \vdash A\to C \qquad Z \vdash B\to C}{X, Y, Z \vdash C} \quad (\vee Ri)$$

Backward-Regeln von N11 (vereinfacht):

$$\frac{X, A \vdash B}{X \vdash A\to B} \quad (\to E)$$

$$\frac{X, \neg A \vdash B\wedge\neg B}{X \vdash A} \quad (\bot c')$$

$$\frac{X, A \vdash B\wedge\neg B}{X \vdash \neg A} \quad (\neg E')$$

$$\frac{X \vdash A\vee B \qquad Y, A \vdash C \qquad Z, B \vdash C}{X, Y, Z \vdash C} \quad (\vee B)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash B}{X, Y \vdash A\wedge B} \quad (\wedge E)$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash A\vee B} \quad (\vee E1) \qquad \frac{X \vdash B}{X \vdash A\vee B} \quad (\vee E2)$$

$$\frac{X \vdash A\to B \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \quad (\to B)$$

$$\frac{X \vdash A\wedge B}{X \vdash A} \quad (\wedge B1) \qquad \frac{X \vdash A\wedge B}{X \vdash B} \quad (\wedge B2)$$

$$\frac{X \vdash \neg\neg A}{X \vdash A} \quad (\neg\neg B)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash A\vee B\to C}{X, Y \vdash C} \quad (DMP) \qquad \frac{X \vdash B \qquad Y \vdash A\vee B\to C}{X, Y \vdash C} \quad (DMP)$$

$$\frac{X \vdash A\vee B \qquad Y \vdash \neg A}{X, Y \vdash B} \quad (DS) \qquad \frac{X \vdash A\vee B \qquad Y \vdash \neg B}{X, Y \vdash A} \quad (DS)$$

$$\frac{X \vdash \neg(A\wedge B) \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash \neg B} \quad (DS') \qquad \frac{X \vdash \neg(A\wedge B) \qquad Y \vdash B}{X, Y \vdash \neg A} \quad (DS')$$

$$\frac{X \vdash \neg(A\wedge B)}{X \vdash \neg A\vee\neg B} \quad (DM)$$

$$\frac{X \vdash \neg(A\vee B)}{X \vdash \neg A\wedge\neg B} \quad (DM)$$

N11a entsteht aus N11 durch Hinzufügen folgender Regeln:

$$\frac{X \vdash \neg(A\rightarrow B)}{X \vdash A} \qquad (\neg\!\rightarrow \text{E})$$

$$\frac{X \vdash \neg(A\rightarrow B)}{X \vdash \neg B} \qquad (\neg\!\rightarrow 1)$$

$$\frac{X \vdash A\rightarrow B}{X \vdash \neg A\vee B} \qquad (\neg\!\rightarrow 2)$$

BEMERKUNG:
N11 entspricht dem Kalkül PSYCOPS von Rips (1994); N11a entspricht dem Kalkül PSYCOPS+ von Rips (1994).

LEMMA 20:
N11 ist unvollständig, da etwa $\neg(p\rightarrow q) \vdash p$ ist nicht herleitbar ist;
N11a ist adäquat.

BEWEIS:
ÜBUNG

.

5.1.17 Die Varianten N12, N12a und N12b

Sperber / Wilson (1995) schlagen (informell) folgende drei Kalküle zur Modellierung des Alltagsschliessens vor:

Variante N12:
X ├ A ist herleitbar in N12 gdw nur Beseitigungsregeln angewendet werden.

BEMERKUNG:
Als Beispiele für Beseitigungsregeln führen sie an:
($\wedge$ B1), ($\wedge$ B2), ($\rightarrow$ B), (DS), den konjunktiven Modus Ponens:

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash A \wedge B \rightarrow C}{X, Y \vdash B \rightarrow C} \quad \text{(KMP)}$$

$$\frac{X \vdash B \qquad Y \vdash A \wedge B \rightarrow C}{X, Y \vdash A \rightarrow C} \quad \text{(KMP)}$$

den disjunktiven Modus Ponens:

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash A \vee B \rightarrow C}{X, Y \vdash C} \quad \text{(DMP)}$$

$$\frac{X \vdash B \qquad Y \vdash A \vee B \rightarrow C}{X, Y \vdash C} \quad \text{(DMP)}$$

Als Beispiele für Einführungsregeln führen sie an:
($\wedge$ E), ($\vee$ E1), ($\vee$ E2), ($\neg\neg$ E)

Das Problem ist jedoch die exakte Definition von Beseitigungs- und Einführungsregel, denn welchen Status hat z.B. folgende Regel:

$$\frac{X, A \vdash B \wedge \neg B}{X \vdash \neg A} \quad (\neg \text{ E'})$$

Variante N12a:

X ├ A ist herleitbar in N12a gdw nur Regeln mit einer Prämisse angewendet werden.

BEMERKUNG:
Das Problem ist jedoch die exakte Definition von Regel mit einer Prämisse, denn eine Regel mit zwei Prämissen, etwa

$$\frac{X \vdash A \rightarrow B \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash B} \qquad (\rightarrow B)^1$$

könnte man ja auch zu einer Regel mit einer einzigen Prämisse machen:

$$\frac{X \vdash A \wedge (A \rightarrow B)}{X \vdash B} \qquad (\rightarrow B)^2$$

Variante N12b:

X, Y ├ A ist herleitbar in N12b gdw X, Y ├ A ist herleitbar in N12 und weder X ├ A noch Y ├ A sind herleitbar in N12.

ÜBERSICHT Nr. 2 (über weitere verwendete Axiome und Regeln):

Axiome:

$\vdash A \vee \neg A$	Tertium non datur
$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$	Doppelte Negation
$A, A \rightarrow B \vdash B$	Modus Ponens
$A, B \vdash A \wedge B$	Konjunktion
$A \wedge B \vdash A$	Simplifikation
$A \wedge B \vdash B$	Simplifikation
$A \rightarrow C, B \rightarrow C \vdash (A \vee B) \rightarrow C$	
$A \vdash A \vee B$	Addition
$A \vdash B \vee A$	Addition
$A \vdash \neg\neg A$	Doppelte Negation
$A, \neg A \vdash B$	Ex falso quodlibet
$\neg B, A \rightarrow B \vdash \neg A$	Modus Tollens
$A \vee B, \neg A \vdash B$	Disjunktiver Syllogismus
$A \vee B, \neg B \vdash A$	Disjunktiver Syllogismus
$\neg\neg A \vdash A$	Doppelte Negation
$A, A \vee B \rightarrow C \vdash C$	disjunktiver Modus Ponens
$B, A \vee B \rightarrow C \vdash C$	disjunktiver Modus Ponens
$A, B, A \wedge B \rightarrow C \vdash C$	konjunktiver Modus Ponens

Regeln (verschiedener Kontext bei zwei- bzw. dreiprämissigen Regeln):

$$\frac{X, A \vdash B \wedge \neg B}{X \vdash \neg A} \quad (\neg\ E')$$

$$\frac{X \vdash A \rightarrow B \wedge \neg B}{X \vdash \neg A} \quad (\neg\ E'')$$

$$\frac{X \vdash A}{X \vdash \neg\neg A} \quad (\neg\neg\ E)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash \neg A}{X, Y \vdash B \wedge \neg B} \quad (\neg\ B')$$

$$\frac{X \vdash \neg\neg A}{X \vdash A} \quad (\neg\neg\ B)$$

$$\frac{X, \neg A \vdash B \wedge \neg B}{X \vdash A} \quad (\bot\ c')$$

$$\frac{X \vdash B \wedge \neg B}{X \vdash A} \quad (\bot\ i')$$

$$\frac{X, \neg A \vdash B \qquad Y, \neg A \vdash \neg B}{X, Y \vdash A} \qquad (\neg\ k)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash \neg A}{X, Y \vdash B} \qquad (\neg\ i)$$

$$\frac{X, A \vdash B \qquad X, A \vdash \neg B}{X \vdash \neg A} \qquad (\neg\ j)$$

$$\frac{X, A \vdash B \qquad Y, \neg A \vdash B}{X, Y \vdash B} \qquad (\neg\ 2)$$

$$\frac{X, A \vdash C \qquad Y, B \vdash C}{X, Y, A \vee B \vdash C} \qquad (\vee\ \mathrm{Rau})$$

$$\frac{X \vdash A \to C \qquad Y \vdash B \to C}{X, Y \vdash (A \vee B) \to C} \qquad (\vee\ \mathrm{Cz})$$

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad Y \vdash A \to C \qquad Z \vdash B \to C}{X, Y, Z \vdash C} \qquad (\vee\ \mathrm{Ri})$$

$$\frac{X \vdash A \qquad A, Y \vdash B}{X, Y \vdash B} \qquad (\mathrm{CUT}^*)$$

$$\frac{X \vdash A \to B \qquad Y \vdash \neg B}{X, Y \vdash \neg A} \qquad (\mathrm{MT})$$

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad Y \vdash \neg A}{X, Y \vdash B} \qquad (\mathrm{DS})$$

$$\frac{X \vdash A \vee B \qquad Y \vdash \neg B}{X, Y \vdash A} \qquad (\mathrm{DS})$$

$$\frac{X \vdash \neg(A \wedge B) \qquad Y \vdash A}{X, Y \vdash \neg B} \qquad (\mathrm{DS}‘)$$

$$\frac{X \vdash \neg(A \wedge B) \qquad Y \vdash B}{X, Y \vdash \neg A} \qquad (\mathrm{DS}‘)$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash A \vee B \to C}{X, Y \vdash C} \qquad (\mathrm{DMP})$$

$$\frac{X \vdash B \qquad Y \vdash A \vee B \to C}{X, Y \vdash C} \qquad (\mathrm{DMP})$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y, \vdash B \qquad Z \vdash A \wedge B \to C}{X, Y, Z \vdash C} \qquad (\mathrm{KMP})$$

$$\frac{X \vdash A \qquad Y \vdash A\wedge B\rightarrow C}{X, Y \vdash B\rightarrow C} \qquad \text{(KMP)}$$

$$\frac{X \vdash B \qquad Y \vdash A\wedge B\rightarrow C}{X, Y \vdash A\rightarrow C} \qquad \text{(KMP)}$$

$$\frac{X \vdash \neg(A\wedge B)}{X \vdash \neg A\vee\neg B} \qquad \text{(DM)}$$

$$\frac{X \vdash \neg(A\vee B)}{X \vdash \neg A} \qquad \text{(DM)}$$

$$\frac{X \vdash \neg(A\vee B)}{X \vdash \neg B} \qquad \text{(DM)}$$

$$\frac{X \vdash \neg(A\vee B)}{X \vdash \neg A\wedge\neg B} \qquad \text{(DM)}$$

$$\frac{X \vdash \neg(A\rightarrow B)}{X \vdash A} \qquad (\neg\!\rightarrow \text{E})$$

$$\frac{X \vdash \neg(A\rightarrow B)}{X \vdash \neg B} \qquad (\neg\!\rightarrow 1)$$

$$\frac{X \vdash A\rightarrow B}{X \vdash \neg A\vee B} \qquad (\neg\!\rightarrow 2)$$

BEMERKUNG:
Wie schon erwähnt, sind der Anzahl von Kalkülen des Natürlichen Schliessens nach oben hin kaum Grenzen gesetzt; man kann beliebige herleitbare Deduktionen als Axiome bzw. ihre Übersetzungen als Regeln annehmen.

5.2 Klassische Prädikatenlogik

Abschliessend einige kurze Bemerkungen zur Prädikatenlogik PL. Diese erhält man erstens, indem man etwa zu N2 folgende Regeln hinzufügt:

$$\frac{X \vdash A(a)}{X \vdash \forall xA(x)} \quad (\forall\ E) \text{ mit (VB)} \qquad\qquad \frac{X \vdash \forall xA(x)}{X \vdash A(t)} \quad (\forall\ B)$$

$$\frac{X \vdash A(t)}{X \vdash \exists xA(x)} \quad (\exists\ E) \qquad\qquad \frac{X \vdash \exists xA(x) \quad A(a), Y \vdash B}{X, Y \vdash B} \quad (\exists\ B) \text{ mit (VB)}$$

Dabei ist t ein beliebiger Term und die Variablenbedingung (VB) lautet: die freie Variable a kommt nur in A(a) vor.

Czermak: Logik. Vorlesungsskriptum verwendet zweitens folgende Regeln:

$$\frac{X \vdash A(a)}{X \vdash \forall xA(x)} \quad (\forall\ E) \text{ mit (VB)} \qquad\qquad \frac{X \vdash \forall xA(x)}{X \vdash A(t)} \quad (\forall\ B)$$

$$\frac{X \vdash A(t)}{X \vdash \exists xA(x)} \quad (\exists\ E) \qquad\qquad \frac{A(a), X \vdash B}{\exists xA(x), X \vdash B} \quad (\exists\ B^*) \text{ mit (VB)}$$

bzw. drittens folgendes System:

Axiome: $\forall xA(x) \vdash A(a)$
$A(a) \vdash \exists xA(x)$

und die Regeln ($\forall$ E) mit (VB) und ($\exists$ B*) mit (VB).

ÜBERSICHT (über prädikatenlogische Axiome und Regeln):

1. das Axiom $\forall xA[x]\rightarrow A[t]$ entspricht den Regeln (ohne VB):

$$\frac{X \vdash \forall xA(x)}{X \vdash A(t)} \qquad (\forall\ B) \text{ bzw.}$$

$$\frac{A(t), X \vdash Y}{\forall xA(x), X \vdash Y} \qquad (\forall\ L)$$

2. das Axiom $A[t]\rightarrow\exists xA[x]$ entspricht den (fast identischen) Regeln (ohne VB):

$$\frac{X \vdash A(t)}{X \vdash \exists xA(x)} \qquad (\exists\ E)$$

$$\frac{X \vdash Y, A(t)}{X \vdash Y, \exists xA(x)} \qquad (\exists\ R)$$

3. Folgende Regeln mit VB sind (fast) identisch:

$$\frac{X \vdash A(a)}{X \vdash \forall xA(x)} \qquad (\forall\ E) \text{ mit (VB)}$$

$$\frac{X \vdash Y, A(a)}{X \vdash Y, \forall xA(x)} \qquad (\forall\ R) \text{ mit (VB)}$$

4. Und:

$$\frac{X \vdash \exists xA(x) \qquad A(a), Y \vdash B}{X, Y \vdash B} \qquad (\exists\ B) \text{ mit (VB)}$$

bzw.

$$\frac{A(a), X \vdash B}{\exists xA(x), X \vdash B} \qquad (\exists\ B^*) \text{ mit (VB)}$$

$$\frac{A(a), X \vdash Y}{\exists xA(x), X \vdash Y} \qquad (\exists\ L) \text{ mit (VB)}$$

Übungen zu Kapitel 5:

1 Beweisen Sie Lemma 8.

2 Beweisen Sie Lemma 9.

3 Beweisen Sie Lemma 10.

4 Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 17.

5 Vervollständigen Sie den Beweis von Lemma 18. Ist N9a ohne ($\perp$ c‘) vollständig?

6 Beweisen Sie Lemma 19.

7 Beweisen Sie Lemma 20.