

DEDUKTIONSSYSTEME

DER

AUSSAGENLOGIK

**VORLESUNG IM SOMMERSEMESTER 2000
GEHALTEN AM INSTITUT FÜR MATHEMATIK
DER UNIVERSITÄT SALZBURG VON**

MARTIN AMERBAUER

SALZBURG

2000

Vorwort

Dieses Skriptum wurde parallel zur Vorlesung ‚Ausgewählte Kapitel der Mathematischen Logik‘ erstellt, die ich im Sommersemester 2000 am Institut für Mathematik der Universität Salzburg gehalten hat. Behandelt werden nach einem einleitenden Kapitel über die Entstehung der Beweistheorie die folgenden vier traditionellen Deduktionssysteme der klassischen Aussagenlogik:

Hilbert-Frege-Kalküle
Tableaukalküle
Sequenzkalküle
Kalküle des Natürlichen Schliessens

Diesem Aufbau folgt auch das vorliegende Skriptum, das in fünf Kapitel gegliedert ist, die wiederum in einzelne Abschnitte unterteilt sind. Die Lemmata bzw. Sätze eines jeden Kapitels werden jeweils von 1 beginnend fortlaufend nummeriert; ebenso die Übungsaufgaben, deren Lösung zur Vertiefung des Verständnisses empfohlen wird.

Das inhaltliche Schwergewicht dieses Skriptums liegt auf der Darstellung von verschiedenen Varianten von Sequenzkalkülen bzw. Kalkülen des Natürlichen Schliessens. Ergänzt wird der Stoff durch ein Kapitel über modale Tableaus, einigen Bemerkungen zur minimalen und intuitionistischen Logik sowie zur Prädikatenlogik.

Ich danke meinen Hörern für zahlreiche kritische Bemerkungen und Anregungen. Die Verantwortung für alle verbliebenen Fehler und Irrtümer verbleibt natürlich bei mir. Vielen Dank auch an Hans Czermak, der wie immer geduldig meine Fragen beantwortet hat.

Ein herzlicher Dank an Ursula, die verständnisvoll meine ‚Zustände‘ während der Erstellung dieses Skriptums ertragen hat. Ich widme dieses Skriptum unserem Alexander, der heute am 15.7.2000 gerade sechs Monate alt geworden ist.

Martin Amerbauer, Juli 2000

Inhalt

1	Einführung.....	1
1.1	Argument, Gültigkeit und Herleitbarkeit.....	1
1.2	Geschichtlicher Überblick.....	5
2	Hilbert-Frege-Kalküle.....	11
2.1	Klassische Aussagenlogik.....	11
2.1.1	Syntax.....	11
2.1.2	Semantik.....	26
2.1.3	Korrektheit und Vollständigkeit.....	31
2.2	Klassische Modallogik.....	35
3	Tableaukalküle.....	38
3.1	Klassische Aussagenlogik.....	38
3.1.1	Die Variante T1 und ein Entscheidungsverfahren für die Aussagenlogik.....	38
3.1.2	Die Variante T2 und ein Beweis der schwachen Vollständigkeit.....	40
3.2	Modale Tableaukalküle.....	48
4	Sequenzenkalküle.....	57
4.1	Klassische Aussagenlogik.....	57
4.1.1	Einleitung.....	57
4.1.2	Die Variante S2 und die Adäquatheit von $S2^+$	65
4.1.3	Die Adäquatheit von S2.....	69
4.1.4	Weitere Varianten von Sequenzenkalkülen.....	80
4.1.5	Die Varianten S1 und S1a.....	83
4.1.6	Die Varianten S2 und S2a.....	86
4.1.7	Die Varianten S3 und S3a.....	99
4.1.8	Die Varianten S4 und S4a.....	104
4.1.9	Die Varianten S5, S5a, S6, S6a, S7 und S7a.....	113
4.1.10	Die Variante S_{MM}	119
4.1.11	Die Varianten S8, S8a, S9, S9a und S_M	120
4.1.12	Die Varianten S10 und S10a.....	125
4.2	Modale Sequenzenkalküle.....	131
4.3	Klassische Prädikatenlogik.....	132
5	Kalküle des Natürlichen Schliessens.....	134
5.1	Klassische Aussagenlogik.....	134
5.1.1	Einleitung.....	134
5.1.2	Die Variante N2 und die Adäquatheit von N2.....	141
5.1.3	Die Beziehung zwischen N2 und S2.....	146
5.1.4	Weitere Varianten von Kalkülen des Natürlichen Schliessens.....	149
5.1.5	Die Varianten N1 und N1a.....	151
5.1.6	Die Varianten N2 und N2a.....	154
5.1.7	Die Varianten N3 und N3a.....	166
5.1.8	Die Varianten N4 und N4a.....	169
5.1.9	Die Variante N5.....	172
5.1.10	Die Variante \mathcal{N}_{MM}	175
5.1.11	Die Varianten N6, N6a und \mathcal{N}_M	176
5.1.12	Die Varianten N7 und N7a.....	179
5.1.13	Die Varianten N8 und N8a.....	184
5.1.14	Die Varianten N9, N9a, N9b und N9c.....	187
5.1.15	Die Variante N10.....	190
5.1.16	Die Variante N11 und N11a.....	195
5.1.17	Die Variante N12, N12a und N12b.....	198
5.2	Klassische Prädikatenlogik.....	203

Literaturangaben

- Bibel, Wolfgang / Eder, Elmar: Methods and calculi for deduction. In: Gabbay, Dov. M. (Hg.): Handbook of logic in artificial intelligence and logic programming. Vol. 1: Logical foundations. Oxford 1993: 67-182.
- Buss, Samuel R.: An introduction to proof theory. In: Buss, Samuel R. (Hg.): Handbook of proof theory. Amsterdam 1998: 1-78.
- Copi, Irving M.: Symbolic logic. New York 4.1973.
- Czermak, Johannes: Aussagenlogik. In: Speck, Josef (Hg.): Handbuch wissenschaftstheoretischer Begriffe. Bd. 1. Göttingen 1980: 42-47.
- Czermak, Johannes: Logik. In: Speck, Josef (Hg.): Handbuch wissenschaftstheoretischer Begriffe. Bd. 2. Göttingen 1980: 377-387.
- Czermak, Johannes: Logik. Vorlesungsskriptum. Salzburg o.J.
- Czermak, Johannes: Modallogik. Vorlesungsskriptum. Salzburg o.J.
- Dragalin, A. G.: Mathematical intuitionism. Introduction to proof theory. Providence 1988.
- Essler, Wilhelm K. / Martínez Cruzado, Rosa F.: Grundzüge der Logik. 2 Bde. Frankfurt/M. 4.1991, 1993.
- Fitch, Frederic B.: Symbolic logic. An introduction. New York 1952.
- Fitting, Melvin: First-order logic and automated theorem proving. Berlin 1990.
- Gentzen, Gerhard: Untersuchungen über das logische Schliessen. In: Mathematische Zeitschrift 39(1934/35): 176-210 und 405-431.
- Gentzen, Gerhard: Die Widerspruchsfreiheit der reinen Zahlentheorie. In: Mathematische Annalen 112(1936): 493-565.
- Gentzen, Gerhard: Neue Fassung des Widerspruchsfreiheitsbeweises für die reine Zahlentheorie. In: Forschungen zur Logik und zur Grundlegung der exakten Wissenschaften, N.F., Nr. 4, Leipzig 1938: 19-44.
- Gentzen, Gerhard: The collected papers of Gerhard Gentzen. Hg. von M.E. Szabo. Amsterdam 1969.
- Girard, Jean-Yves: Proof theory and logical complexity. Bd 1. Napoli 1987.
- Goré, Rajeev: Tableau methods for modal and temporal logics. In: D'Agostino, Marcello u.a. (Hg.): Handbook of tableau methods. Dordrecht 1999: 297-396.
- Heindorf, Lutz: Beweistheorie. Mannheim 1994.
- Jaskowski, Stanislaw: On the rules of suppositions in formal logic. In: McCall, Storrs (Hg.): Polish logic 1920-1939. Oxford 1967: 232-258 [Polnisches Orig. in: Studia Logica (Old Series) 1(1934): 5-32].
- Klenk, Virginia: Understanding symbolic logic. Englewood Cliffs 2.1989.
- Mates, Benson: Elementare Logik. Prädikatenlogik der ersten Stufe. Göttingen 2.1978.
- Prawitz, Dag: Natural deduction. A proof-theoretical study. Stockholm 1965.
- Prawitz, Dag: Ideas and results in proof theory. In: Fenstad, Jens Erik (Hg.): Proceedings of the second Scandinavian logic symposium. Amsterdam 1971: 235-307.
- Rautenberg, Wolfgang: Klassische und nichtklassische Aussagenlogik. Braunschweig 1979.
- Rautenberg, Wolfgang: Modal tableau calculi and interpolation. In: Journal of philosophical logic 12(1983): 403-423; Corrections für „Modal tableau calculi and interpolation“. In: Journal of philosophical logic 14(1985): 229.
- Rautenberg, Wolfgang: Einführung in die mathematische Logik. Ein Lehrbuch mit Berücksichtigung der Logikprogrammierung. Braunschweig 1996.
- Rips, Lance J.: The psychology of proof. Deductive reasoning in human thinking. Cambridge 1994.
- Schütte, Kurt: Proof theory. Berlin 1977.
- Schütte, Kurt: Beweistheorie. In: Speck, Josef (Hg.): Handbuch wissenschaftstheoretischer Begriffe. Bd. 1. Göttingen 1980: 95-99.
- Schurz, Gerhard: Einführung in die Aussagen- und Prädikatenlogik. Vorlesungsskriptum. Salzburg 1995.
- Seegerberg, Krister: An essay in classical modal logic. Uppsala 1971.
- Socher-Ambrosius, Rolf: Deduktionssysteme. Mannheim 1994.
- Sperber, Dan / Wilson, Deirdre: Relevance. Communication and cognition. Oxford 2.1995.
- Stålmarck, Gunnar: Normalization theorems for full first order classical natural deduction. In: The journal of symbolic logic 56(1991): 129-149.
- Sundholm, Goran: Systems of deduction. In: Gabbay, Dov M. / Guenther, Franz (Hg.): Handbook of philosophical logic. Bd. 1: Elements of classical logic. Dordrecht 1983: 133-188.
- Takano, Mitio: Persönliche Mitteilung. 1996.
- Takeuti, Gaisi: Proof theory. Amsterdam 2.1987.
- Troelstra, Anne S.: Lectures on linear logic. Stanford 1992.
- Troelstra, Anne S. / Schwichtenberg, Helmut: Basic proof theory. Cambridge 1996.
- Ungar, Anthony M.: Normalization, cut-elimination and the theory of proofs. Stanford 1992.
- Ungar, Anthony M.: Natural deduction, tableau and sequent systems. In: Craig, Edward (Hg.). Routledge encyclopedia of philosophy. London 1998.